AM120 2012-2013: I ESONERO

TEMA 1.

1.a. Enunciare le regole di derivazione delle funzioni composte e della funzione inversa e dimostrare una delle due regole.

1.b. Siano $f, g \in C(\mathbf{R})$ tali che $f \circ g$ sia derivabile in $\mathbf{R}$. Provare, usando 1.a, le seguenti affermazioni

(i) se $f \in C^1$ e $f'(g(x_0)) \neq 0$ allora g é derivabile in x_0

(ii) se $g \in C^1$ e $g'(x_0) \neq 0$ allora f é derivabile in $g(x_0)$

Mostrare con dei controesempi che in tali affermazioni le ipotesi $f'(g(x_0)) \neq 0$ e $g'(x_0) \neq 0$ sono essenziali.

TEMA 2.

2.a. Sia $\phi \in C^2(\mathbf{R})$. Provare la Formula di Taylor al secondo ordine:

$$\exists \xi \in (0,1): \quad \phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)$$

Usare quindi tale risultato per provare la formula di Taylor al secondo ordine, con il resto secondo Lagrange, per una funzione $f \in C^2(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Dedurre che

2.b. se $f \in C^2(\mathbf{R})$ é tale che $f''(x) \geq \delta > 0 \quad$ per $|x| \geq R$, allora

(i) $\frac{f'(x)}{x} \geq \frac{\delta}{2}$, $f(x) \geq \frac{\delta}{4}x^2 \quad$ per $|x|$ grande (ii) Se $R = 0$ allora f' é biettiva

TEMA 3. Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Provare le seguenti implicazioni: f é convessa $\Rightarrow$ f' é non decrescente $\Rightarrow$ $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ é convessa.

TEMA 4 . Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Provare che

$$\exists\ M,\ r > 0: \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é analitica in } (a,b)$$

Sia poi $g \in C^1(\mathbf{R})$ tale che $f(g(x)) = 0 \quad \forall x$. Provare che se f é analitica e g non é costante allora $f \equiv 0$. Mostrare che l'analiticitá di f é essenziale.

TEMA 5. Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, mostrare che l'insieme su cui converge é un intervallo centrato nell'origine. Determinare quindi il raggio r di tale intervallo (Formula di Cauchy-Hadamard).

Definita poi $\quad f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ in $I := (-r, r)$, provare che f é analitica in I.

Infine, provare che $\quad f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$ é una funzione periodica.

ESERCIZIO 1. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[(1-x)^{-1}+e^x]^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x\log(\cos x)}$$

ESERCIZIO 2. Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-i)^{-n}z^n, z \in \mathcal{C}$$

Si determini l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n^2+2)2^n}, z \in \mathcal{C}$$

ESERCIZIO 3. Detto $\log x$ il logaritmo naturale di x, studiare il dominio, eventuali asintoti, massimi e minimi locali/globali, della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\log x}{e + x\log x}.$$

Disegnarne un grafico qualitativo.

ESERCIZIO 4. Data $f \in C^2(\mathbf{R})$, siano

$$\forall\alpha \in \mathbf{R}, \quad f_\alpha(x) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \qquad\qquad \tilde{f}(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \quad \alpha \in \mathbf{R}\}$$

Fissato x, trovare i punti stazionari di $\alpha \to g_x(\alpha) := f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}$ e mostrare che
(i) $\alpha = x$ é punto di massimo (locale) per la funzione $\alpha \to g_x(\alpha)$ se $f''(x) > 0$ mentre é di minimo (locale) se $f''(x) < 0$
(ii) se $f''(x) > 0$ per $|x|$ grande, allora

$$(*) \quad \forall x \in \mathbf{R}, \exists\alpha(x) : \quad \tilde{f}(x) = g_x(\alpha(x)) \quad e \quad f''(\alpha(x))(x-\alpha(x)) = 0$$

$$(**) \quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) \quad \forall\alpha \quad t.c. \quad f''(\alpha) = 0$$

Calcolare infine $\tilde{f}$ nei casi $f(x) = \frac{3}{3+x^2}, \quad f(x) = \cosh x - x^2.$