2013-AM120: Settimana 11

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

1. Se $I_n(x) := \int_0^x t^{n-1}e^t\,dt$, é $I_{n+1}(x) = x^n e^x - nI_n(x)$

2. Se $I_n(x) := \int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt$, é $I_{n+1}(x) = nI_n(x) - x^n e^{-x}$

3. $S_n(x) := \int_0^x \sin^n t\,dt \;=\; (1-\frac{1}{n})S_{n-2}(x) - \frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x$

   $C_n(x) := \int_0^x \cos^n t\,dt \;=\; (1-\frac{1}{n})C_{n-2} + \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\,dt \;=\; \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n}) \;=\; \frac{\pi}{2}\,\frac{2n-1!!}{2n!!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt \;=\; (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\ldots(1-\frac{1}{2n+1}) \;=\; \frac{2n!!}{2n+1!!}$$

Da cui la **formula di Wallis**:

$$\pi \;=\; \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \times \left[\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right], \qquad \frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{n\pi} + O(1)$$

4. Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$, é $I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

5. Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\,dt$, é $I_n(x) = \frac{n-2}{n}I_{n-2} - \frac{x^{n-2}}{n(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$

Esecuzione dei calcoli:

1. $\int_0^x t^n e^t dt = -n\int_0^x t^{n-1}e^t + x^n e^x$ 2. $\int_0^x t^n e^{-t}dt = n\int_0^x t^{n-1}e^{-t} - x^n e^{-x}$

3. $\int_0^x \sin^n t dt = \int_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t\cos^2 t dt - \sin^{n-1}x\cos x$

$\Rightarrow n\int_0^x \sin^n t dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t dt - \sin^{n-1}x\cos x$. 4.: come 3.

4. $\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = -\int_0^x t\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+t^2)^n}dt + \frac{t}{(1+t^2)^n}\Big|_0^x = 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} =$

$2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \Rightarrow 2n\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}dt = (2n-1)\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{x}{(1+x^2)^n}.$

5. $I_n(x) = -\int_0^x t^{n-2}\,\frac{d}{dt}[\frac{1}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}]\,dt = \frac{n-2}{n}\int_0^x \frac{t^{n-3}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}dt \;-\; \frac{x^{n-2}}{n(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$

INTEGRALI IMPROPRI

Integrali impropri (su intervalli illimitati), assoluta integrabilitá.

Sia $f \in C([a,+\infty))$ o, piú in generale, sia $f\chi_{[a,+\infty)}$ localmente integrabile, di modo che é definita in $[a,+\infty)$ la funzione integrale $F(x) := \int\limits_a^x f$. Diremo che f é **integrabile in senso improprio** (o generalizzato) **se esiste finito** $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f$.

Se f **é non negativa**, F risulta, per l'additivitá e positivitá dell'integrale, non decrescente, ed allora **esiste (finito od infinito)**

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Se tale limite é finito la f si dice **integrabile in senso improprio** (o 'in senso generalizzato') o 'a integrale convergente' su $[a,+\infty)$ e scriveremo $\int\limits_a^{+\infty} f < +\infty$.

Se $\int\limits_a^{+\infty} |f| < +\infty$ diremo che f é **assolutamente integrabile** in $[a,+\infty)$.

ESEMPI.

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é a integrale convergente in $[1,+\infty)$ se e solo se $\alpha > 1$, giacché

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1} \qquad se \quad \alpha > 1$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad se \quad \alpha < 1$$

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

c) $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$ d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{1}{n}$

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(s)ds = \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$

f) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

g) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2 x\,dx = \frac{2}{5}$, $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos x}{x^2}|dx \le \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$

Teorema del Confronto.

(i) $\exists R \geq a: \ |f(x)| \ \leq g(x) \ \ \forall x \geq R, \ \ \int\limits_a^{+\infty} g \ < \ +\infty \ \ \Rightarrow \ \ \int\limits_a^{+\infty} |f| \ < \ +\infty$

(ii) $\exists R \geq a: \ 0 \leq g \ \leq f \ \ \forall x \geq R, \ \ \int\limits_a^{+\infty} g \ = \ +\infty \ \ \Rightarrow \ \ \int\limits_a^{+\infty} f \ = \ +\infty$

Prova. (i) $\int\limits_R^x |f| \leq \int\limits_R^x g \ \ \Rightarrow \ \sup\limits_{x\geq R} \int\limits_a^x |f| \ \leq \ \int\limits_a^{+\infty} g \ < \ +\infty$

(ii) Analogo: $\int\limits_a^{+\infty} g \ = \ +\infty \ \ \Leftrightarrow \ \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^x g \ = \ +\infty \ \Rightarrow \sup\limits_{x\geq a} \int\limits_a^x f \ = \ +\infty$ perché $f \geq g$ per x grande e quindi $\int\limits_a^{+\infty} f \ = \ +\infty$

Dal Teorema del confronto e dall'Esempio b), seguono subito

Corollario A.

(i) $\exists M, R > 0, \ \alpha > 1: \ |f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha} \ \ \forall\, x \geq R \ \Rightarrow \ |f|$ é integrabile in $[a, +\infty)$

(ii) $\exists M, R > 0: \ |f(x)| \ \geq \ \frac{M}{x}, \ \ \forall\ x \geq R \ \Rightarrow \ \int\limits_a^{+\infty} |f| \ = \ +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

Sia $f \in C([a, +\infty)$. Allora

(i) $\exists \alpha > 1: \ x^\alpha |f(x)| \ \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ c \ < \ +\infty \ \ \Rightarrow \ f$ integrabile in $[a, +\infty)$.

(ii) $x|f(x)| \ \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ c \ > \ 0 \ \ \Rightarrow \ \int\limits_a^{+\infty} |f| \ = \ +\infty$

(i) Infatti, : $x^\alpha |f(x)| \ \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ c \ < \ +\infty \ \ \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2c}{|x|^\alpha}$ per $x \geq x_c$. Siccome $\alpha > 1$, $f = f[\chi_{[x_c,+\infty)} + \chi_{[a,x_c]}]$ é integrabile in $[a, +\infty)$. Analogamente per (ii).

Condizione di Cauchy per l' integrabilitá.

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f \ \text{ esiste finito } \Leftrightarrow \left[\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon: \ x_\epsilon \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow \ |\int\limits_{x_1}^{x_2} f| \ \leq \epsilon \ \right]$$

Infatti, se $F(x) := \int\limits_a^x |f|$, $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ esiste finito sse $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon:$ $x_\epsilon \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} |f| = |F(x_2) - F(x_1)| \leq \epsilon.$

Assoluta integrabilitá implica integrabilitá.

Segue da Cauchy: $x_1 \le x_2 \quad \Rightarrow \quad |\int\limits_{x_1}^{x_2} f| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} |f|$.

...ma si vede anche cosí: $\int\limits_a^{+\infty} |f| = \int\limits_a^{+\infty} f^+ + f^- < \infty \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} f^\pm < \infty \quad \Rightarrow$ $\int\limits_a^{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - f^- = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^- = \int\limits_a^{+\infty} f^+ - \int\limits_a^{+\infty} f^-$ esiste finito.

Quanto sopra mostra come sia importante, per l'integrabilitá di f, quella di f^+ ed f^- (e quindi quella di $|f|$!): se, viceversa, $\int\limits_a^{+\infty} f^+ = \int\limits_a^{+\infty} f^- = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - f^- = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^+ - \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f^-$ si presenta come limite in forma indeterminata, e quindi non esisterá, in generale. Tuttavia, puó accadere che $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f$ esista finito anche se $\int\limits_a^{+\infty} f^+ = \int\limits_a^{+\infty} f^- = +\infty$ (e quindi anche senza che f sia assolutamente integrabile).

ESEMPIO 1. Sia $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \chi_{[n,n+1)}(x)$ (cioé f é la funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n+1}$ in $[n, n+1)$) allora $\int\limits_0^{\infty} f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ (serie convergente) perché, se $x > 1$,

$$\int\limits_0^x f = \int\limits_0^{[x]} f + \int\limits_{[x]}^x f = \sum_{n=0}^{[x]-1} \frac{(-1)^n}{n+1} + \circ(1)$$

$(|\int\limits_{[x]}^x f| \le \frac{1}{1+[x]} \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0!)$. Poi, chiaramente, $\int\limits_0^{\infty} |f| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.

ESEMPIO 2. Sia $f(x) := \frac{\sin x}{x} \chi_{(0,+\infty)}$. Allora

(i) $\int\limits_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt = +\infty$ (ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ esiste finito.

Prova di (i). Sia $I_1 := [\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$, $I_n := I_1 + (n-1)\pi$, $\sin x \ge \frac{1}{2}\ \forall x \in I_n, \forall n$. É $l(I_n) = \frac{2}{3}\pi \ \ \forall n \in \mathbf{N}$ e $|\frac{\sin x}{x}| \ge \frac{1}{2n\pi}$, $\forall x \in I_n$. Dunque, per ogni n,

$$\int\limits_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \ge \int\limits_0^{n\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi} \chi_{I_j}(t) dt \ge \frac{2}{3}\pi \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi} \to_n +\infty$$

Prova di (ii). Integrando per parti

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt - \frac{\cos t}{t}\Big|_1^x \to -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt + \cos 1.$$

perché $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}|\, dt < +\infty$ implica che esiste finito $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^{x} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$

APPENDICE

Formula di Taylor con il resto in forma integrale
Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \quad (*)_n$$

Dimostrazione. Infatti, $\varphi(1) = \varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(t)dt$: $(*)_1$ é vera.

Supponiamo $(*)_n$ vera. Mediante una integrazione per parti, otteniamo

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt = -\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n}\varphi^{(n+1)}(t)dt - \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n)}(t)|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0). \qquad \text{Dunque} \quad (*)_{n+1} \quad \text{é vera}$$

Deduzione della Formula di Wallis. Da

$$S_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{2n-1!!}{2n!!}, \qquad S_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt = \frac{2n!!}{2n+1!!}$$

e $S_{2n-1} \geq S_{2n} \geq S_{2n+1}$ (perché $\sin x \leq 1$) segue $\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \geq 1$ e quindi

$$1 \leq \frac{\pi}{2}\left[\frac{2n-1!!}{2n!!}\right]^2 (2n+1) \leq \frac{2n+1}{2n}$$

e quindi

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{2n-1!!}{2n!!}\right]^2 = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}), \qquad \frac{\pi}{2} = \left[\frac{2n!!}{2n-1!!}\right]^2 \left[\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})\right]$$

Dalla formula di Wallis segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2\, 2^{2n}}{(2n)!\,\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

Infatti

$$\sqrt{\pi} = \frac{2n!!}{2n-1!!\,\sqrt{n}}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right) = \frac{(2n!!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right) = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}\left(1 + O(\frac{1}{n})\right)$$

L'integrale di Gauss

Calcolo , mediante la formula di Wallis, di :

(**integrale di Gauss**) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cominciamo con la diseguaglianza elementare

$$(*) \qquad 1-x \le e^{-x} \le \frac{1}{1+x}\,, \quad \forall x \ge 0$$

La diseguaglianza di sinistra, valida per $x=0$, segue da $\frac{d}{dx}[e^{-x}-(1-x)] = -e^{-x}+1 \ge 0, \quad \forall x \ge 0$. La diseguaglianza di destra, equivalente a $x - \log(1+x) \ge 0$, segue da

$$\tfrac{d}{dx}[x-\log(1+x)] = 1 - \tfrac{1}{1+x} \ge 0, \quad \forall x \ge 0.$$

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \le \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx$, otteniamo

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \le \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2\,\ldots\,2n}{3\,\ldots\,(2n+1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} + \circ(1) \le \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} + \circ(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.