13AM120: Settimana 9

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

A titolo introduttivo, consideriamo due problemi, apparentemente scollegati:

PROBLEMA 1. (esistenza di una primitiva). Data f in un intervallo aperto I, esiste P (*primitiva*) derivabile in I e tale che $P' = f$ in I?

PROBLEMA 2. Data $f \geq 0$ in $[a, b]$, come definire l'area del sottografico $\{(x, y) : \quad x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$?

La risposta al Problema 1 é: in generale NO. Una condizione necessaria é data dal

Teorema di Darboux

Se $P' = f$ in I intervallo aperto, allora f ha la proprietá del valore intermedio.

PROVA. Sia $\alpha = f(a), \beta = f(b), a, b \in I$. Possiamo supporre $a < b, \alpha < \beta$. Preso $\alpha < \gamma < \beta$, sia $g(x) = P(x) - \gamma x$. Siccome P é continua, g ha minimo in $[a, b]$. Tale minimo non puó essere preso in a, perché $g'(a) = \beta - \gamma < 0$, né in b, perché $g'(b) > 0$. Dunque il punto di minimo, diciamo c, é interno e quindi $0 = g'(c) = P'(c) - \gamma = f(x) - \gamma$, ovvero $f(c) = \gamma$.

Tale proprietá peró non basta. Un esempio: $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ e $P^{\pm}(x) = x \sin \frac{1}{x} + c^{\pm}$ sono le sue primitive in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$. Ma f, pur godendo ovviamente della proprietá del valore intermedio, non ammette primitiva P in $(-1, 1)$. Infatti dovrebbe essere $P = x \sin \frac{1}{x} + c^-$ in $(-1, 0)$ e $P = x \sin \frac{1}{x} + c^+$ in $(0, 1)$ e quindi, per continuitá, $c^+ = c^-$, ovvero $P = x \sin \frac{1}{x} + c$ per qualche c che peró non é derivabile in zero per alcun c.

Circa il problema 2, vedremo un modo molto naturale di definire, nel caso ad esempio che f sia continua, l'area del suo sottografico. Indichiamo qui come la risoluzione del problema 2 porti a risolvere anche il problema 1. Chiamiamo $A(x), x \in (a, b)$ l'area del sottografico di f ristretta ad $[a, x]$. Se questa funzione ha le proprietá che ci aspettiamo dall'area (additivitá), avremo che il rapporto incrementale $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ si scrive come $f(x)$ piú l'area del triangoloide di vertici $(x, f(x), (x + h, f(x)), (x + h, f(x + h)$. Siccome f é limitata tale area deve andare (per la monotonia dell'area) a zero, e quindi $A(x)$ é una primitiva di f.

Richiamiamo alcune NOTAZIONI e semplici proprietá:

$x^+ := \frac{1}{2}(|x|+x) = x$ se $x \geq 0$, $x^+ = 0$ se $x \leq 0$, $x^- := x^+ - x$ e quindi
$x^- := \frac{1}{2}(|x|-x) = 0$ se $x \geq 0$, $x^- = -x$ se $x \leq 0$, e quindi $x^+ + x^- = |x|$
Si ha: $(-x)^+ = x^-$, $(-x)^- = x^+$, $(x+y)^+ \leq x^+ + y^+$, $(x+y)^- \leq x^- + y^-$

Se $A \subset \mathbf{R}$, $\inf\limits_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}$, $\sup\limits_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$.

1. $\inf\limits_{A\cup B} f \leq \inf\limits_A f \leq \sup\limits_A f \leq \sup\limits_{A\cup B} f$
2. $\inf\limits_A f + \inf\limits_A g \leq \inf\limits_A (f+g) \leq \sup\limits_A (f+g) \leq \sup\limits_A f + \sup\limits_A g$
3. $\sup\limits_A(-f) = -\inf\limits_A f$, $\inf\limits_A(-f) = -\sup\limits_A f$ e quindi
4. $\inf\limits_A f - \sup\limits_A g \leq \inf\limits_A (f-g) \leq \sup\limits_A (f-g) \leq \sup\limits_A f - \inf\limits_A g$
5. $\chi_A \equiv 1$ in A, $\chi_A \equiv 0$ fuori di A é la funzione caratteristica di A.
6. Il supporto di f é la chiusura di $\{x : \ f(x) \neq 0\}$.

$f^+(x) := (f(x))^+$ e quindi $f^+ := f\chi_{\{x:f(x)\geq 0\}}$, quad $f^-(x) := (f(x))^-$ e quindi $f^- := -f\chi_{\{x:f(x)\leq 0\}}$ Chiaramente, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$, $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$, $(f+g)^- \leq f^- + g^-$.

Se I é un intervallo di estremi $a \leq b$, $l(I) := b - a$ indicherá la sua lunghezza. Notare che se I_j sono n intervalli e $\cup_j I_j$ é un intervallo, allora é $l(\cup_j I_j) \leq \sum_j l(I_j)$ e che, se I_j sono *intervalli 'quasi disgiunti'* (tali cioé che $I_j \cap I_l$ contiene al piú un punto $\forall j \neq l$) e $\cup_j I_j$ é un intervallo, allora $l(I) = \sum_j l(I_j)$. Piú in generale, se I_j, $j = 1, \ldots, n$ sono intervalli 'quasi' disgiunti, scriveremo $l(\cup_{j=1}^n I_j) = \sum_{j=1}^n l(I_j)$.

Siano $I_j, j \in \mathbf{N}$ intervalli di estremi $a_j \leq b_j$, **limitati e quasi disgiunti**, cioé $(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Chiameremo I_j **partizione** di $\mathbf{R}$ se

(i) $\mathbf{R} = \cup_j I_j$, (ii) $\{a_j, b_j : j \in \mathbf{N}\}$ é privo di punti di accumulazione.

Notiamo che (i) assicura che $A = \cup_j (I_j \cap A)$ $\forall A \subset \mathbf{R}$, mentre (ii) assicura che $\{j : \ I_j \cap [-R, R] \neq \emptyset\}$ é finito $\forall R \geq 0$.

Se J_i é un'altra partizione di $\mathbf{R}$, diremo che J_i **é un raffinamento della** I_j se $\forall J_i, \exists I_j : \ J_i \subset I_j$. Se I_j, J_i sono partizioni, $I_{ij} := I_j \cap J_i$, é 'raffinamento' delle due partizioni. Notare che $I_j = \cup_i I_{ij}$, $J_i = \cup_j I_{ij}$ (unioni quasi disgiunte!)

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI LIMITATE A SUPPORTO COMPATTO

Sia $\quad b_0(\mathbf{R}) := \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad \text{tali che } f \text{ é limitata e a supporto compatto}\}$, ovvero

$$f \in b_0(\mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists M > 0 : \quad |f(x)| \le M \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \text{ se } |x| \ge M.$$

Somme inferiori/superiori di Riemann
Integrale inferiore/superiore

Sia $f \in b_0(\mathbf{R})$. Sia I_j partizione di $\mathbf{R}$. Allora

$$s(f; I_j) := \sum_j (\inf_{I_j} f) \;\; l(I_j) \qquad \text{é somma inferiore}$$

$$S(f; I_j) := \sum_j (\sup_{I_j} f) \;\; l(I_j) \qquad \text{é somma superiore}$$

$$\underline{I}(f) := \sup\{s(f; I_j) : \;\; I_j \;\; \text{partizione di } \; [a, b]\} \qquad \text{é l' integrale inferiore di } f$$

$$\overline{I}(f) := \inf\{S(f; I_j) : \;\; I_j \;\; \text{partizione di } \; [a, b]\} \qquad \text{é l'integrale superiore di } f$$

LEMMA 1 Se I_j, J_i sono due partizioni e $I_{ij} := I_j \cap J_i$, allora

$$s(f; I_j) \le s(f; I_{ij}) \le S(f; I_{ij}) \le S(f; J_i)$$

e quindi $\quad s(f; I_j) \le S(f; J_i) \quad$ e quindi $\quad \underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$. Infatti

$$s(f; I_{ij}) = \sum_{ij} \inf_{I_{ij}} \; f \, l(I_{ij}) \;\ge\; \sum_j \sum_i \inf_{I_j} f \, l(I_{ij}) \;=\; \sum_j \; \inf_{I_j} f \, l(I_j) = s(f; I_j)$$

$$S(f; I_{ij}) = \sum_{ij} \sup_{I_{ij}} \; f \, l(I_{ij}) \;\le\; \sum_j \sum_i \sup_{I_j} f \, l(I_{ij}) \;=\; \sum_j \; \sup_{I_j} f \, l(I_j) = S(f; I_j)$$

NOTA. Piú in generale, *raffinando la partizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono.*

DEFINIZIONE $f \in b_0(\mathbf{R})$ é integrabile su $\mathbf{R}$ se $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Si scrive

$$\int_{\mathbf{R}} f = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx := \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$$

ESEMPI.

1. Sia $-L \le f(x) \le M \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = 0$ se $|x| \ge R$. Allora $-2LR \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le 2MR$. Infatti, se I_j é partizione con $I_1 := [-R, R]$, allora $-2LR \le s(f, I_j) \le S(f; I_j) = 2R \sup_{I_1} f \le 2MR$.

2. Sia J un intervallo limitato, $f = \chi_{\mathbf{Q} \cap J}$. É $\overline{I}(f) = l(J), \quad \underline{I}(f) = 0$. Infatti, I_j partizione, $I_j \cap J \ne \emptyset \quad \Rightarrow \quad \sup_{I_j} f = 1, \quad \inf_{I_j} f = 0$.

3. Se $I_j, j \in \mathbf{N}$ sono intervalli limitati 'quasi disgiunti', $f = \chi_{\cup_{j=1}^n I_j}$ é integrabile per ogni n e $\int \chi_{\cup_{j=1}^n I_j} = \sum_{j=1}^n l(I_j)$. Infatti, f é nulla fuori di $\cup_{j=1}^n I_j$, e quindi, aggiumgendo altri $I_j, j \ge n+1$ in modo da ottenere una partizione di $\mathbf{R}$, troviamo che $s(f, I_j) = \sum_{j=1}^n l(I_j) = S(f, I_j)$.

Domanda: $\chi_{\cup_{j=1}^\infty I_j}$ *é integrabile? Risposta: in generale no! ...(vedi Appendice)*

LEMMA 2 $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ se e solo se $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists I_j^\epsilon$ partizione :

$$\sum_j (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \ l(I_j) = \quad S(f; I_j^\epsilon) - s(f; I_j^\epsilon) \le \epsilon \qquad (*)$$

Infatti $0 \le \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le S(f; I_j) - s(f; I_j)$ per ogni partizione I_j. Quindi $(*)$ implica $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Viceversa, dalla definizione di $\overline{I}(f), \underline{I}(f)$ come estremo inferiore (rispettivamente, superiore), segue che, fissato ϵ, esistono partizioni $I_j^\epsilon, J_i^\epsilon$ tali che

$$S(f; I_j^\epsilon) \le \overline{I}(f) + \epsilon, \qquad s(f; J_i^\epsilon) \ge \underline{I}(f) - \epsilon$$

e quindi $S(f; I_j^\epsilon \cap J_i^\epsilon) - s(f; J_i^\epsilon \cap I_j^\epsilon) \le \overline{I}(f) + \epsilon - \underline{I}(f) + \epsilon = 2\epsilon$ se $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

Teorema di Riemann (integrabilitá delle funzioni continue)

Sia $f \in C_0(\mathbf{R})$ *(cioé* $f \in b_0(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$*) . Allora* f *é integrabile.*

Prova. Sia $f(x) = 0$ se $|x| \ge R$. Per Heine-Cantor,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \qquad |x - y| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le \frac{\epsilon}{2R}$$

Sia n tale che $\frac{R}{n} \le \delta_\epsilon$. Siano $I_j = [-R + \frac{(j-1)R}{n}, -R + \frac{Rj}{n}]$ per $j = 1, \dots, 2n$. Gli I_j sono quasi disgiunti, $l(I_j) = \frac{R}{n}, \quad \forall j = 1, \dots, 2n$ e la loro unione é $[-R, R]$. Siano $I_j, j \ge 2n+1$ tali che $I_j, j \in \mathbf{N}$ sia partizione di $\mathbf{R}$. Siano $x_j, y_j \in I_j$ tali che

$f(x_j) = \sup_{I_j} f, \quad f(y_j) = \inf_{I_j} f.$ Allora

$$S(f,I_j) - s(f,I_j) = \sum_{j=1}^{2n} [\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f] l(I_j) = \sum_{j=1}^{2n} [f(x_j) - f(y_j)] \frac{R}{n} \le 2n \frac{\epsilon}{2R} \frac{R}{n} = \epsilon$$

NOTA . Se f ha un punto di discontinuitá, diciamo in x_0, modificando la partizione I_j in $I_j \cap J_i$, ove $J_1 = [-\infty, x_0 - \delta)$, $J_2 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $J_3 = [x_0 + \delta, +\infty)$ e $2\delta \sup_{J_2} |f| \le \epsilon$, vediamo che $S(f; I_j) - s(f; I_j) \le 2\epsilon$, e quindi f é integrabile. Se f ha p discontinuitá x_l e $2\delta \sup_{|x-x_l|\le\delta} |f| \le \frac{\epsilon}{p}$, si trova ancora $S(f; I_j) - s(f; I_j) \le 2\epsilon$ e quindi f é integrabile.

Teorema di Lebesgue-Vitali *Sia* $D_f := \{x \in \mathbf{R} : \quad f \text{ é discontinua in } x\}$

Allora $f \in b_0(\mathbf{R})$ *é integrabile se e solo se* D_f *é di misura nulla.*

Esempio. Sia $A \subset \mathbf{R}$ limitato; χ_A é integrabile sse ∂A ha misura nulla, perché

$$D_{\chi_A} = \partial A := \{x \in \mathbf{R} : \quad (x-r, x+r) \cap A \ne \emptyset \ne (x-r, x+r) \cap A^c \quad \forall\, r > 0\}$$

LINEARITÁ DELL'INTEGRALE. Siano $f, g \in b_0(\mathbf{R})$ integrabili. Allora

$$\alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \text{ é integrabile e } \quad I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$$

É $\underline{I}(\alpha f) = \alpha \underline{I}(f)$ $\quad \overline{I}(\alpha f) = \alpha \overline{I}(f)$ perché $\inf_I (\alpha f) = \alpha \inf_I f$, $\sup_I (\alpha f) = \alpha \sup_I f$.
Integrabilitá della somma: segue subito dal fatto che

$$(*) \qquad \underline{I}(f) + \underline{I}(g) \le \underline{I}(f+g) \le \overline{I}(f+g) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$$ Prova di $(*)$:

$$(f+g)(x) \le \sup_{x\in I_j} f(x) + \sup_{x\in I_j} g(x) \quad \Rightarrow \quad \sup_{I_j} (f+g) \le \sup_{I_j} f + \sup_{I_j} g \quad \Rightarrow$$

$$\overline{I}(f+g) \le S(f+g, I_j) \le S(f, I_j) + S(g, I_j)$$

D'altra parte, esistono partizioni $I_j^\epsilon, J_i^\epsilon$ tali che

$$S(f; I_j^\epsilon) + S(g; J_i^\epsilon) \le \overline{I}(f) + \epsilon + \overline{I}(g) + \epsilon$$

Se $I_{ij} := I_j^\epsilon \cap J_i^\epsilon$, allora $\quad \overline{I}(f+g) \le S(f; I_{ij}) + S(g; I_{ij}) \le \overline{I}(f) + \overline{I}(g) + 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0$.
Analogamente si prova la diseguaglianza a sinistra in $(*)$.

NOTA . Notiamo che é in generale falso che $\underline{I}(f+g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g)$. Prendere ad esempio $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbf{Q}}$, $g = \chi_{[0,1]\setminus\mathbf{Q}}$: $\underline{I}(f+g) = 1$, $\underline{I}(f) = \underline{I}(g) = 0$.

Proposizione. Siano f, g integrabili. Allora

(i) $|f|, f^+, f^-$ sono integrabili e quindi $\int_{\mathbf{R}} f = \int_{\mathbf{R}} f^+ - \int_{\mathbf{R}} f^-$
(ii) fg é integrabile.

Prova. (i) Basta mostrare che $\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f$. Se $f \ge 0$ é ovvio. Se $f \le 0$, é $\sup_I |f| - \inf_I |f| = \sup_I (-f)| - \inf_I (-f) = -\inf_I f + \sup_I f$. Sia dunque $\inf_I f < 0 < \sup_I f$. Da $\sup_I |f| = max\{\sup_I f, -\inf_I f\}$, segue

$$\sup_I f \ge -\inf_I f \quad \Rightarrow \quad \sup_I |f| - \inf_I |f| = \sup_I f - \inf_I |f| \le \sup_I f \le \sup_I f - \inf_I f$$

$$\sup_I f \le -\inf_I f \quad \Rightarrow \quad \sup_I |f| - \inf_I |f| \le -\inf_I f - \inf_I |f| \le -\inf_I f + \sup_I f$$

(ii) Proviamolo dapprima nel caso $g = f$. Intanto, da $|f| \ge 0$ in I segue

$$\sup_I f^2 = (\sup_I |f|)^2, \quad \inf_I f^2 = (\inf_I |f|)^2 \qquad \text{Infatti,}$$

$$0 \le |f(x)| \le \sup_I |f| \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f^2(x) \le (\sup_I |f|)^2 \quad \Rightarrow \quad \sup_I f^2 \le (\sup_I |f|)^2$$

Poi, fissato ϵ piccolo, esiste $x_\epsilon \in I$ tale che $|f(x_\epsilon)| \ge \sup_I |f| - \epsilon > 0$ e quindi $\sup_I |f|^2 \ge |f(x_\epsilon)|^2 \ge (\sup_I |f| - \epsilon)^2 = (\sup_I |f|)^2 + O(\epsilon)$ e quindi, mandando ϵ a zero, $\sup_I |f|^2 \ge (\sup_I |f|)^2$. Analogamente si vede che $\inf_I f^2 = (\inf_I |f|)^2$.
Ma allora, $\sup_I f^2 - \inf_I f^2 = (\sup_I |f|)^2 - (\inf_I |f|)^2 =$

$$[\sup_I |f| - \inf_I |f|] \times [\sup_I |f| + \inf_I |f|] \le 2 \sup_I |f| \times [\sup_I |f| - \inf_I |f|] \quad \Rightarrow$$

$$S(f^2, I_j) - s(f^2, I_j) \le 2 \sup_{\mathbf{R}} |f| \, [S(|f|, I_j) - s(|f|, I_j)]$$

e quindi f^2 é integrabile perché lo é $|f|$.
Infine, l'integrabilitá di fg segue da $fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$.

NOTA . L'integrabilitá di $|f|$ non comporta (sfortunatamente!) l'integrabilitá di f (ad esempio, $f = \chi_{[0,1]\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})} - \chi_{[0,1]\cap\mathbf{Q}}$. Qui f^+ ed f^- non sono integrabili!).

MONOTONIA DELL'INTEGRALE. $f, g \in b_0(\mathbf{R})$ integrabili $\Rightarrow$

$$f \le g \quad \Rightarrow \quad I(f) \le I(g).$$

Prova. $0 \le g - f \Rightarrow 0 \le I(g-f) = I(g) - I(f)$.

UNA DISEGUAGLIANZA INTEGRALE.

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f \right| \le \int_{\mathbf{R}} |f| \qquad \forall f \in b_0(\mathbf{R})$$

Prova. $\quad |\int_{\mathbf{R}} f| = |\int_{\mathbf{R}} f^+ - \int_{\mathbf{R}} f^-| \le \int_{\mathbf{R}} f^+ + \int_{\mathbf{R}} f^- = \int_{\mathbf{R}} |f|$.

APPENDICE: L'INSIEME DI CANTOR

Diamo qui un esempio di un insieme aperto O, unione numerabile di intervalli disgiunti, tale che χ_O non é integrabile.

Sia $1 > r_1 \ldots \ge r_n \ldots, r_n \to r \ge 0, \quad l_n = \frac{r_n}{2^n}, \qquad J_{1,1} := [0,1]$.

Sia $I_{1,1}$ l'intervallo aperto, centrato nel punto medio di $J_{1,1}$ e di lunghezza $l(I_{1,1}) = 1 - 2l_1$ (intervallo centrale).
Siano $J_{2,1}, J_{2,2}$ gli intervalli ottenuti rimuovendo $I_{1,1}$ da $J_{1,1}$. Siano $I_{2,1}, I_{2,2}$ i corrispondenti intervalli centrali di lunghezza $l_1 - 2l_2$.
Iterando, si costruiscono

$$I_{n,j}, j = 1, \ldots, 2^{n-1} \quad \text{intervalli aperti di lunghezza} \quad l_{n-1} - 2l_n.$$

Risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (l_{n-1} - 2l_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-1} - r_n) = 1 - r$$

Notiamo anche che l'aperto

$$O := \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$$

é denso in $[0,1]$. Da ció segue che le somme superiori di $\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}}$ valgono almeno 1, mentre ogni somma inferiore vale al piú $1 - r$. Dunque

$$\chi_{\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}} \quad \text{non é integrabile}$$

L'insieme $[0,1] \setminus O$ si chiama **insieme di Cantor** generalizzato (Cantor se $r_n = (\frac{2}{3})^n$).