AM120 2013 Settimana 6

ESERCIZI E COMPLEMENTI (dai temi del I Esonero)

TEMA 1.

1.a. Enunciare le regole di derivazione delle funzioni composte e della funzione inversa e dimostrare una delle due regole.

1.b. Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tali che $f \circ g$ sia derivabile in $\mathbf{R}$. Provare, usando 1.a, le seguenti affermazioni

(i) se $g \in C^1$ e $g'(x_0) \neq 0$ allora f é derivabile in $y_0 := g(x_0)$

(ii) se $f \in C^1$, $f'(g(x_0)) \neq 0$ e g é continua in x_0, allora g é derivabile in x_0

Mostrare con dei controesempi che in tali affermazioni le ipotesi $f'(g(x_0)) \neq 0$ e $g'(x_0) \neq 0$ sono essenziali.

Illustriamo il punto 1.b cominciando con l'osservare che dalla derivabilitá di $f \circ g$ non segue alcuna proprietá di g od f. Ad esempio,

se f é costante, $f \circ g$ é costante (e quindi derivabile) quale che sia g;

analogamente se g é costante ed f é qualsiasi.

In tali esempi é $f' \equiv 0, g' \equiv 0$, rispettivamente.

Altri controesempi: $g(x) = x^2, x_0 = 0, f(y) = |y|, \quad g(x) = |x|, x_0 = 0, f(y) = y^2$

Prova di (i). Da $g'(x_0) \neq 0$ segue che esiste un $\delta > 0$ tale che g é biiezione tra $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $g((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$. Siccome $f(y) = (f \circ g)(g^{-1}(y))$ per ogni $y \in g((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$, deduciamo dalla regola della catena che f é derivabile in $y_0 = g(x_0)$.

Piú direttamente, usando il cambio di variabile (ammissibile perché $g'(x_0) \neq 0$) $y = g(x)$, troviamo che

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \quad \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = (f \circ g)'(x_0) \frac{1}{g'(x_0)}$$

Prova di (ii) e un controesempio . Da $f'(y_0) \neq 0$ segue che esiste un $\delta > 0$ tale che $\tilde{f}$, restrizione di f a $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ é biiezione tra $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ e $f((y_0 - \delta, y_0 + \delta))$. Siccome g é continua in x_0, esiste $r > 0$ tale che $g(x_0 - r, x_0 + r) \subset (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ e quindi $\tilde{f}^{-1}(f(g(x)))$ é ben definita e vale $g(x)$ che é quindi derivabile con, per la regola della catena, $g'(x_0) = \frac{(f \circ g)'(x_0)}{f'(y_0)}$.

Mostriamo con un esempio che puó accadere che $f, f \circ g \in C^\infty$ e $f'(g(x_0)) \neq 0$ senza che g sia continua in x_0. Basta prendere

$$g = \chi_{\mathbf{Q}} - \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}} \quad e \quad f(y) = y^2 - 1$$

per cui $(f \circ g)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ e $f'(g(x)) \neq 0 \quad \forall x$. Notiamo che se $g(x_0) = 1$, allora

$$\tilde{f}(y) = f(y) \text{ in } (0, +\infty) \text{ e quindi } \tilde{f}^{-1}(f(g(x))) = \tilde{f}^{-1}(0) = 1 \neq g(x) \text{ se } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

Similmente se $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Notiamo infine che se $f \in C^1$ con $f'(x) \neq 0 \quad \forall x$ allora $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ e la derivabilitá di $f \circ g$ comporta la derivabilitá di g.

TEMA 2.

2.a. Sia $\phi \in C^2(\mathbf{R})$. Provare la Formula di Taylor al secondo ordine:

$$\exists \xi \in (0,1): \quad \phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(\xi)$$

Usare quindi tale risultato per provare la formula di Taylor al secondo ordine, con il resto secondo Lagrange, per una funzione $f \in C^2(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Dedurre che

2.b. se $f \in C^2(\mathbf{R})$ é tale che $f''(x) \geq \delta > 0 \quad$ per $|x| \geq R$, allora

(i) $\frac{f'(x)}{x} \geq \frac{\delta}{2}$, $f(x) \geq \frac{\delta}{4}x^2 \quad$ per $|x|$ grande (ii) Se $R = 0$ allora f' é biettiva

Illustriamo qui il punto 2.b. Mostriamo (i) . Per Lagrange,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \exists t = t(x) \in (0,1): \quad \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(tx) \geq \delta \quad \forall x$$

per ipotesi. Siccome, per $|x|$ grande, $\frac{f'(0)}{x} \geq -\frac{\delta}{2}$, troviamo $\frac{f'(x)}{x} \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$.

Mostriamo (ii). Dalla formula di Taylor con il resto secondo Lagrange,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \exists t = t(x) \in (0,1): \quad \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{x^2} + \frac{f'(0)}{x} + \frac{1}{2}f''(tx) \geq -\frac{\delta}{8} - \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{4}$$

se $|x|$ é abbastanza grande da risultare $\frac{f(0)}{x^2} \geq -\frac{\delta}{8}$, $\frac{f'(0)}{x} \geq -\frac{\delta}{8}$.

TEMA 4 . (i) Sia $f \in C^\infty((a,b))$. Provare che

$$\exists\ M,\ r > 0: \qquad \sup_{(a,b)} |f^{(n)}(x)| \ \leq \ \frac{Mn!}{r^n} \quad \forall\ n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é analitica in } (a,b)$$

(ii) Sia $g \in C(\mathbf{R})$ ed $f(g(x)) = 0 \quad \forall x$. Provare che se f é analitica e g non é costante allora $f \equiv 0$. Mostrare che l'analiticitá di f (ma non la continuitá di g!) é essenziale.

Prova di (ii) Siccome $g(\mathbf{R})$ é un intervallo, che non si riduce ad un punto perché g non é costante, ed $f \equiv 0$ su $g(\mathbf{R})$, concludiamo che, per l'unicitá del prolungamento analitico, $f \equiv 0$.

L'ipotesi di continuitá si puó indebolire. Basta chiedere ad esempio a g di avere la proprietá del valore intermedio (in particolare, che esista G derivabile tale che $g = G'$) od anche meno, ad esempio che $g(\mathbf{R})$ abbia punti di accumulazione (ad esempio $g(x) = \sin\frac{1}{x}\,\chi_{\mathbf{Q}}(x)$).

Controesempio: basta prendere $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ tale che $|g(x)| \leq R \quad \forall x$ ed $f \in C^\infty$ tale che $f(x) = 0 \quad \forall x \in [-R, R]$. Si puó prendere ad esempio

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x-R|^2}} \quad se \quad |x| > R, \qquad f(x) = 0 \quad se \quad |x| \leq R$$

TEMA 5. Data la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, mostrare che l'insieme su cui converge é un intervallo centrato nell'origine. Determinare quindi il raggio r di tale intervallo (Formula di Cauchy-Hadamard).
Definita poi $\quad f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ in $I := (-r, r)$, $\quad$ provare che f é analitica in I.
Infine, provare che $\quad f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \quad$ é una funzione periodica.

Illustriamo qui l'ultimo punto. Sappiamo che

$$s(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = Im \exp(it) \quad \text{e che} \quad c(t) := Re\,(\exp\ it) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$$

ha un primo zero positivo, diciamo t_0. Dunque $\quad c(t_0) = 0, c(t) > 0$ in $[0, t_0)$. Poi,

$$c(a+b) + is(a+b) = \exp(i(a+b)) =$$

$$\exp(ia)\exp(ib) = [c(a){+}is(a)][c(b){+}is(b)] = c(a)c(b){-}s(a)s(b){+}i[s(a)c(b){+}c(a)s(b)] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad c(a+b) = c(a)c(b) - s(a)s(b), \qquad s(a+b) = s(a)c(b) + c(a)s(b)$$

Siccome $s(0) = 0, c(0) = 1$ e $s' = c > 0$ in $[0, t_0)$, $s(t_0) = 1$ perché $s^2 + c^2 = |\exp(it)|^2 \equiv 1$. Dunque, usando le formule di duplicazione

$$s(2t_0) = 2s(t_0)c(t_0) = 0, \quad c(2t_0) = c^2(t_0) - s^2(t_0) = -1$$

$$c(4t_0) = c^2(2t_0) - s^2(2t_0) = 1, \quad s(4t_0) = 0$$

e quindi

$$s(t + 4t_0) = s(t)c(4t_0) + s(4t_0)c(t) = s(t) \qquad \forall t$$

ESERCIZIO 4. Data $f \in C^2(\mathbf{R})$, siano, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,

$$f_\alpha(x) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha), \qquad \tilde{f}(x) := \sup\{f_\alpha(x) : \quad \alpha \in \mathbf{R}\}$$

Trovare, $\forall x \in \mathbf{R}$, i punti critici di $\quad g_x(\alpha) := f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha), \quad \alpha \in \mathbf{R}$ e

(i) mostrare che $\quad \alpha = x$ é punto di massimo (locale) per la funzione $\alpha \to g_x(\alpha)$ se $\quad f''(x) > 0 \quad$ mentre é di minimo (locale) se $f''(x) < 0$

(ii) mostrare che se $f''(x) > 0$ per $|x|$ grande, allora

$(*)\quad \forall x \in \mathbf{R}, \exists \alpha(x) : \quad \tilde{f}(x) = g_x(\alpha(x)) \quad e \quad f''(\alpha(x))(x - \alpha(x)) = 0$

$(**)\quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \forall \alpha \quad t.c. \quad f''(\alpha) = 0.$

(iii) Calcolare $\tilde{f}$ nei casi $f(x) = \frac{3}{3+x^2}$, $f(x) = 2\cosh x - x^2\cosh(1)$.

Prova di (i). Fissato x, $0 = \frac{d}{d\alpha} g_x(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}[f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)] = f''(\alpha)(x-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = x \quad \textit{oppure} \quad f''(\alpha) = 0$$

e, se $f''(x) > 0$ ed α é vicino a x, allora $f''(\alpha)(x-\alpha) > 0$ se e solo se $\alpha < x$ e quindi x é di massimo locale, mentre se $f''(x) < 0$ ed α é vicino a x, allora $f''(\alpha)(x-\alpha) > 0$ se e solo se $\alpha > x$ e quindi x é di minimo locale.

Prova di (ii). $f''(\alpha) > 0$ per $|\alpha| \geq R$, $\frac{d}{d\alpha} g_x(\alpha) = f''(\alpha)(x-\alpha) \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{d\alpha} g_x(\alpha) < 0 \quad \forall \alpha > max\{x, R\}, \qquad \frac{d}{d\alpha} g_x(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha < min\{x, -R\}$$

e quindi $\tilde{f}(x) := \sup g_x(\alpha)$ é realizzato in qualche $\alpha(x)$ (necessariamente uno zero di f'' oppure $\alpha(x) = x$, e, in questo ultimo caso, $\tilde{f}(x) = f(x)$)

$$\tilde{f}(x) = f(\alpha(x)) + f'(\alpha(x))(x - \alpha(x)) = max\{f(x), f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) : f''(\alpha) = 0\}$$

(iii) Se $f(x) = \frac{3}{3+x^2}$, $f''(x) = \frac{18(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$ é positiva all'infinito e si annulla in $x = \pm 1$; le rette tangenti nei punti di flesso $(\pm 1, \frac{3}{4})$ sono $y = \frac{3}{4} \pm \frac{3}{8}(x \pm 1)$.

$$\text{Dunque} \qquad \tilde{f}(x) = \frac{9}{8} - \frac{3}{8}x \quad se \quad x \leq 0, \qquad \tilde{f}(x) = \frac{9}{8} + \frac{3}{8}x \quad se \quad x \geq 0$$

(iii) Se $f(x) = 2\cosh x - x^2\cosh(1)$, $f''(x) = 2\cosh x - 2\cosh(1)$ é positiva all'infinito e si annulla in $x = \pm 1$; le rette tangenti nei punti di flesso di f sono

$$in \quad (-1, \cosh(-1)) \qquad y_- = 3\cosh 1 - 2\sinh 1 - 2(\sinh 1 - \cosh 1)x$$

$$in \quad (1, \cosh 1) \qquad y_+ = 3\cosh 1 - 2\sinh 1 + 2(\sinh 1 - \cosh 1)x$$

Confrontiamo ora $f(x)$ con y_-. Posto $g(x) := f(x) - y_-(x)$, sappiamo che $g(-1) = g'(-1) = g''(-1) = 0$ e $g''(x) = 0$ in ± 1 e $g''(x) > 0$ se e solo se $|x| > 1$. Quindi $g(x) > 0$ per $x < -1$. Poi, per la concavitá di g in $[-1, 1]$, g' decresce in $[-1, 1]$ e quindi $g < 0$ in $(-1, 1]$. Per la convessitá di g in $(1, +\infty)$ ed il fatto che $g(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$, concludiamo che g ha esattamente uno zero, diciamo M in $(1, +\infty)$, e quindi

$f \geq y_-$ in $(-\infty, -1] \cup [M, +\infty)$. Ed anche $f \geq y_+$ in $(-\infty, -M] \cup [1, +\infty)$

In conclusione,

$$\tilde{f} = f\chi_{(-\infty,-M]} + y_+\chi_{[-M,0]} + y_-\chi_{[0,M]} + f\chi_{[M,+\infty}$$

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

CONVERGENZA PUNTUALE. Sia $E \subset \mathbf{R}$. Siano $f_n : E \to \mathbf{R}$.

Diremo che **la 'successione di funzioni' f_n converge puntualmente in E alla funzione** f se, per ogni $x \in E$, $\quad f_n(x) \to_n f(x)$

Diremo che **la serie di funzioni** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **converge puntualmente in** E se la successione delle somme parziali $S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} a_n(x)$ converge puntualmente in E e scriveremo $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_n(x)$

ESEMPI. 1. Se $f_n(x) \equiv a_n$, $\quad x \in E \subset \mathbf{R}$, le f_n convergono se e solo se a_n converge e, in tal caso, $\lim_n f_n(x) \equiv \lim a_n$.
2. Se $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, allora f_n converge alla funzione che vale zero in $[0,1)$ e vale 1 in $x = 1$.
3. Ogni serie di potenze converge puntualmente dentro il proprio intervallo di convergenza.
4. *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ *converge se e solo se* $x = m\pi$ *per qualche intero* m (ed in tal caso la somma é zero) giacché $\limsup_n |\sin(nx)| > 0$ se $x \notin \mathbf{Z}\pi$.
Infatti, sia $\limsup_n |\sin(nx)| = 0$ e quindi $\lim_n [\sin(nx)] = 0$.
Sia $x \geq 0$ e $m(n) \in \mathbf{N}$ tale che $m(n)\pi \leq nx < [m(n)+1]\pi$. Allora $\min\{nx - m(n)\pi, \quad (m(n)+1)\pi - nx\} \to_n 0$, altrimenti esistono $n_k \to_k +\infty$ e $\delta > 0$ tali che $m(n_k)\pi + \delta \leq n_k x \leq (m(n_k)+1)\pi - \delta$ e quindi $|\sin(n_k x)| \geq \sin\delta$. Dunque

$$\forall l_n \in \mathbf{N}, \exists l_n : \quad nx = l_n\pi + \circ(1) \quad \text{e quindi} \quad l_{n+1}\pi = (n+1)x + \circ(1) = x + l_n\pi + \circ(1)$$

e quindi $x = (l_{n+1} - l_n)\pi + \circ(1)$. Da ció segue che $k_n := l_{n+1} - l_n$ é una successione limitata e quindi esiste k_{n_j} convergente a qualche intero k. Da $x = k_{n_j}\pi + \circ(1) \to_j k\pi$ segue appunto $x = k\pi$.
Mostriamo infine che $\lim_n (nx)$ *esiste se e solo se x é multiplo intero di π* .
Infatti, $\liminf_n |\sin(nx)| = 0$ per ogni x. Questo é ovvio se x é multiplo razionale di π, mentre, se $\frac{x}{\pi} \notin \mathbf{Q}$, usiamo il fatto (non banale..) che

$$\forall \xi \notin \mathbf{Q}, \ \exists n_k \in \mathbf{N}, m_k \in \mathbf{Z} : \quad |\xi - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$$

e quindi $|n_k x - m_k\pi| = \circ(1)$ e quindi $\sin(n_k x) = \sin(n_k x - m_k\pi) = \circ(1)$. In particolare, $\limsup |\cos(nx)| = 1$.
Concludiamo osservando che, da quanto sopra, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp(int) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(nt) + i \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(nt)$ non converge per alcun t.

Una proprietá che deriva dal fatto che la successione $f_n(x) = \sin(nx)$ é *limitata*, nel senso che $\quad \exists M > 0 : \quad |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \quad$ é la seguente:

per ogni x esiste una selezione di indici $n_k = n_k(x)$ tale che $\quad \exists$ *finito* $\lim_k f_{n_k}(x)$.

Di piú, usando un metodo detto **'procedimento diagonale di Cantor'**, é facile mostrare che se $D := \{x_j : \quad j \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$ é un insieme numerabile, allora esiste una selezione di indici $\quad n_k = n_k(D) \quad$ tale che $\quad \exists \lim_k f_{n_k}(x) \quad \forall x \in D.\quad$ Il metodo é il seguente:

si trova dapprima una prima selezione di indici $n(1,1), \ldots, n(1,k), \ldots$ tale che $\exists \lim_k f_{n(1,k)}(x_1)$;

si trova poi, una nuova selezione di indici $n(2,k)$, sottoselezione di $n(1,k)$, t.c. $\exists \lim_k f_{n(2,k)}(x_2)$. Ovviamente é anche $\quad \lim_k f_{n(2,k)}(x_1) = \lim_k f_{n(1,k)}(x_1)$.

Iterando, per ogni j si trova una selezione di indici $n(j,k)$ tale che $\exists \lim_k f_{n(j,k)}(x_1), \ldots, \exists \lim_k f_{n(j,k)}(x_j)$. Tale selezione si puó prendere infatti sottoselezione di tutte le selezioni precedenti. Non é difficile convincersi che

la successione diagonale $n(j,j)$ $\quad$ é tale che $\quad \lim_j f_{n(j,j)}(x)$ esiste per ogni $x \in D$.

Ci si puó chiedere se, lavorando ancora, si possa trovare una selezione di indici n_k tale che $\lim_k f_{n_k}(x)$ esista per ogni x. Questo non é in generale possibile, e lo si puó vedere con $f_n(x) = \sin nx$. É infatti vero (ma qui non proviamo) che:
se n_k é una selezione di indici qualsiasi ed $E := \{x \in \mathbf{R} : \ \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, allora *$E$ ha misura nulla*: $\quad \forall \epsilon > 0, \exists I_j^\epsilon$, intervalli, tali che $\quad E \subset \cup_j I_j^\epsilon \ $ e $\ \sum_j l(I_j^\epsilon) < \epsilon$.
Gli insiemi di misura nulla non possono contenere troppi punti: ad esempio, un insieme di misura nulla non puó contenere un intervallo. Tuttavia, i sottoinsiemi numerabili di $\mathbf{R}$ hanno evidentemente misura nulla, ma non tutti gli insiemi di misura nulla sono numerabili. Un esempio é dato da $\quad$ *l'insieme di Cantor* $\quad$ che incontreremo tra breve.

CONVERGENZA UNIFORME.

In generale le proprietá delle f_n non si conservano nel limite puntuale. Nell'esempio $f_n(x) = x^n, \ x \in [0,1] \quad$ le f_n sono continue, ma il loro limite non lo é. Ció si puó escludere se 'la convergenza é.....piú forte':
Se f_n converge puntualmente in E ad f, si dice che la convergenza é uniforme (in E) se

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to_{n \to \infty} 0$$

$\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ si dice uniformemente convergente in E se $S_n(x) := \sum_{j=1}^n a_n(x)$ converge uniformemente in E