Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 9: Funzioni continue. Ripasso per il secondo esonero.

Esercizio 9.1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue o se possono essere prolungate per continuità su tutto $\mathbb{R}$:

(9.1.1) $\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$,

(9.1.2) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$,

(9.1.3) $x[x]$,

(9.1.4) $\{x\} + \{-x\}$,

(9.1.5) $|[x]|^{\{x\}}$,

(9.1.6) $\frac{1}{x^4} \wedge x^2$,

(9.1.7) $\frac{x+|x|}{2}$,

(9.1.8) $\sin(x) \vee \cos(x)$,

dove $a \wedge b := \min\{a,b\}$ e $a \vee b := \max\{a,b\}$.

Esercizio 9.2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie, al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ quando compare:

(9.2.1) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{x}{x-2}\right)^n$,

(9.2.2) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3+3}$,

(9.2.3) $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+2}$,

(9.2.4) $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n^2+\cos(n)}$,

(9.2.5) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{\cosh(n)}$,

(9.2.6) $\sum_{n\geqslant 4}\left(\frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}+\frac{\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan^n(10)}\right)$.

Esercizio 9.3. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni

(9.3.1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(|x|)}{\log(1+x^2)}$,

(9.3.2) $\lim_{x\to\infty}\log(\sinh(x))\tan\left(\frac{1}{x}\right)$,

(9.3.3) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\{x\}}{[x]}$,

(9.3.4) $\limsup_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(\pi n^2\right)\right)$.

Esercizio 9.4.

(9.4.1) Stabilire se il seguente insieme è aperto o chiuso: $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| 4x^2 - 7x + 3 \neq 0\right\}$.

(9.4.2) Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$,

$$E := \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right) \cup \left\{\tan\left(\frac{2n-1}{4n}\pi\right)\middle| n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si trovi la chiusura di E, si stabilisca se è aperto o chiuso e determinarne i punti di accumulazione.

Esercizio 9.5. Utilizzando la definizione, provare la continuità delle seguenti funzioni sul loro dominio di definizione:

(9.5.1) x, (9.5.2) x^2, (9.5.3) $\log(x)$, (9.5.4) e^x.

Esercizio 9.6. Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica* se $\exists T > 0$ tale che $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e periodica, allora non esiste $\lim_{x\to\infty} f(x)$, a meno che f non sia costante.