# Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

## Tutorato 7: Serie numeriche. Elementi di topologia di $\mathbb{R}$ — 2.

**Esercizio 7.1.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie:

(7.1.1) $\sum_{n\geqslant 1} (\sin(\sin(n)))^n$,
(7.1.2) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{-\sqrt{n}}$,
(7.1.3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n}$,
(7.1.4) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$,
(7.1.5) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{3n+5}\right)$,
(7.1.6) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \log^3(n)}$,
(7.1.7) $\sum_{n\geqslant 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$,
(7.1.8) $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{j=1}^{n^n} \sin\left(\frac{22}{7} j\pi\right)$.

**Esercizio 7.2.** Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie, al variare dei parametri $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(7.2.1) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{2+x^n}$,
(7.2.2) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{1+e^{n^2 x}}$,
(7.2.3) $\sum_{n\geqslant 0} x^{x^n}$ $(x > 0)$,
(7.2.4) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}$,
(7.2.5) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n^2 x)}{n^2+x^2}$,
(7.2.6) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n\alpha}}{(n!)^\beta}$ $(\alpha, \beta > 0)$,
(7.2.7) $\sum_{n\geqslant 0} x^{\sqrt{n}}$,
(7.2.8) $\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha x^{n^\beta}$ $(x > 0)$.

**Esercizio 7.3.** Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti o chiusi, e determinarne i punti di accumulazione:

(7.3.1) $\left\{\frac{3n-2}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$,
(7.3.2) $\left\{x^2 + x + 1 = 0\right\}$,
(7.3.3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$,
(7.3.4) $\left\{x^2 + x < 2\right\}$.

**Esercizio 7.4.** Sia $X$ un insieme non vuoto. Un'applicazione $d : X \times X \to [0, +\infty)$ si dice essere una *metrica* (o *distanza*) su $X$ se, per ogni $x, y, z \in X$, si ha

(i) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simmetria*),

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Se $d$ è una metrica su $X$, si dice che la coppia $(X, d)$ è uno *spazio metrico*.

(7.4.1) Stabilire se le seguenti funzioni sono distanze su $X$, al variare di $X \in \{\mathbb{R}, (0, \infty), (-\infty, 0)\}$:
  (a) $d_1(x, y) := \left|x^2 - y^2\right|$,
  (b) $d_2(x, y) := (x - y)^2$,
  (c) $d_3(x, y) := \sqrt{|x^2 - y^2|}$,
  (d) $d_4(x, y) := |e^x - e^y|$.

(7.4.2) Dimostrare che se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione iniettiva, allora $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ è una metrica su $X$.

**Esercizio 7.5.** Sia $F \subset \mathbb{R}$. Provare che

$$F \text{ è chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad (\{x_n\} \subset F \,:\, x_n \to x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x \in F)\,.$$

**Esercizio 7.6.**

(7.6.1) Comunque scelto $k \in \mathbb{N}$, esibire un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\#\mathscr{D}A = k$;

(7.6.2) Trovare un sottoinsieme illimitato $A \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathscr{D}A = \varnothing$ e $A = \partial A$;

(7.6.3) Provare che $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$;

(7.6.4) Provare che $O \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se $O \cap \partial O = \varnothing$;

(7.6.5) Provare che $F \subset \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se $\partial F \subset F$;

(7.6.6) Provare che $A \subset \mathbb{R}$ è simultaneamente aperto e chiuso se e solo se $\partial A = \varnothing$;

(7.6.7) Dimostrare che $\mathring{\mathbb{Q}} = \mathring{\widehat{\complement \mathbb{Q}}} = \varnothing$ e $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$;

(7.6.8) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un aperto. Provare che $\mathring{\widehat{\partial A}} = \varnothing$. Si può concludere lo stesso se $A$ è chiuso? E se $A$ è un insieme qualsiasi?

**Esercizio 7.7.** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$. Dimostrare che se $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, allora converge anche $\sum_{n\geqslant 1} a_n^2$. Provare, esibendo un controesempio, che il viceversa non è vero.

**Esercizio 7.8.** Stabilire per quali $x > 0$ la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} x^j}$$

è convergente.

**Esercizio 7.9.** Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona crescente di numeri positivi. Dimostrare che la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\prod_{j=1}^{n} (1 + a_j)}$$

è convergente.

**Esercizio 7.10.** Siano $a_1, b_1 > 0$, e si definiscano

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2 + a_n}, \qquad b_{n+1} := \frac{b_n}{1 + b_n}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

Provare che la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ è convergente, mentre $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ è divergente.
*Suggerimento.* Verificare per induzione che $a_n = \frac{a_1}{2^n + (2^n - 1)a_1}$ e $b_n = \frac{a_1}{1 + na_1} \ldots$