

I Esonero di AM110 - 31/10/2012

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Dato $p > 0$, provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Tema 2 [5 punti] Dati $0 < a < b$ due numeri reali positivi, provare che esiste sempre $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \in (a, b)$.

Tema 3 [5 punti] Enunciare e dimostrare il Principio di Archimede.

Esercizio 1 [3 punti] Mostrare per induzione la seguente identità:

$$\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n! \frac{\sqrt{n! + n^2} - \sqrt{n!}}{\sqrt{n! + 4}}}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare sup ed inf dei seguenti insiemi, specificando se si tratta di massimo o minimo:

$$E = \left\{ \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad F = \left\{ 2n + \frac{3}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$