I Esonero di AM110 - 31/10/2012 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Per $n = 1$ l'identitá vale. Se vale per n, abbiamo che

$$\prod_{k=0}^{n+1}(1+x^{2^k}) = (1+x^{2^{n+1}})\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = (1+x^{2^{n+1}})\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+2}}}{1-x}.$$

Dal Principio di Induzione segue che l'identitá vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2
Dai limiti notevoli ed usando il Teorema del confronto, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+n^2}{2^n+n^3} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{2})^n\frac{1+n^2 3^{-n}}{1+n^3 2^{-n}} = \lim_{n\to+\infty}(\frac{3}{2})^n = +\infty$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!\frac{\sqrt{n!+n^2}-\sqrt{n!}}{\sqrt{n!+4}}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!\frac{n^2}{\sqrt{n!+4}(\sqrt{n!+n^2}+\sqrt{n!})}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Esercizio 3
Si puó vedere facilmente che $\inf E = \min E = \frac{3}{5}$. Inoltre, da $\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} \leq 3$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} = 3$, si ottiene che $\sup E = 3$. Siccome l'insieme F non risulta limitato superiormente (basta fissare m e far crescere n), si ha che $\sup F = +\infty$. Siccome $2n + \frac{3}{m} \geq 2$ e (con $n = 1$) $\lim\limits_{m\to+\infty} 2 + \frac{3}{m} = 2$, otteniamo che $\inf E = 2$.