Appello X di AM110 - 4/9/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Per $x \leq \frac{3}{2}$ abbiamo che

$$\frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} = \frac{1}{n} \frac{n^{x-2} + 1}{n^{2x-3} + 1} \sim \frac{1}{n},$$

e dal criterio asintotico la serie considerata diverge. Per $\frac{3}{2} < x \leq 2$ abbiamo che

$$\frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} = \frac{1}{n^{2x-2}} \frac{n^{x-2} + 1}{1 + n^{3-2x}} \sim \frac{1}{n^{2x-2}},$$

e dal criterio asintotico la serie considerata converge poiché $2x - 2 > 1$. Infine, per $x > 2$ abbiamo che

$$\frac{n^x + n^2}{n^{2x} + n^3} = \frac{1}{n^x} \frac{1 + n^{2-x}}{1 + n^{3-2x}} \sim \frac{1}{n^x},$$

e la serie converge ancora per il criterio asintotico. In conclusione, la serie converge solo per $x > \frac{3}{2}$.

Esercizio 2 Osserviamo che $a_n \geq 0$ per ogni n. Siccome $a_{n+1} \geq a_n$ vale sempre, abbiamo che la successione a_n cresce in maniera monotona ad un limite $l \geq 0$, ed inoltre $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ vale se e solo se $a_n \leq \frac{1}{2}$. Nel caso l sia finito, l deve soddisfare $l = l^2 + \frac{1}{4}$, ossia $l = \frac{1}{2}$. Otteniamo quindi che $a_n \to \frac{1}{2}$ per $n \to +\infty$ se $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ mentre a_n diverge a $+\infty$ se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Esercizio 3 Per il primo limite abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} n \frac{\log \frac{n+1}{n} - \log(1 - \sin \frac{1}{n})}{1 + n \sin \frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\log \frac{n+1}{n(1-\sin\frac{1}{n})}}{\frac{n+1}{n(1-\sin\frac{1}{n})} - 1} \left[n + 1 - n(1 - \sin \frac{1}{n}) \right] = 1$$

mentre per il secondo vale

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - 1}} - 1 \right] &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\sqrt{\frac{\sqrt{1+x} + 1}{1 + \sqrt{1-x}}} - 1 \right] = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x} \left[\frac{\sqrt{1+x} + 1}{1 + \sqrt{1-x}} - 1 \right] \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{8x} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 [3 punti] Siccome l'uniforme continuitá implica la continuitá, l'unica scelta possibile per α e β risulta essere $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} - 1$. Mostriamo che in questo caso la funzione $f(x)$ risulta effettivamente uniformemente continua. Dato $\epsilon > 0$ esiste $\delta_1 > 0$

tale che $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ se $x, y \in [0,1]$ con $|x - y| \leq \delta_1$ (per uniforme continuitá di f su $[0,1]$, vedi Tema 3). Dato $\delta_2 = \frac{\epsilon}{\beta} > 0$, abbiamo inoltre che $|f(x) - f(y)| = \beta|x - y| \leq \epsilon$ per $x, y \in (1, +\infty)$ con $|x - y| \leq \delta_2$. Per continuitá di f in 1 esiste infine $\delta_3 > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ per $x, y \in [1 - \delta_3, 1 + \delta_3]$. Scegliendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, come richiesto abbiamo che $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ per $x, y \geq 0$ con $|x - y| \leq \delta$: nel caso $x \in [0,1]$ e $y \in [1, \infty)$ o viceversa, la condizione $|x - y| \leq \delta$ garantisce che $x, y \in [1 - \delta_3, 1 + \delta_3]$.