

Appello C di AM110 - 4/6/2013

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Dato $p > 0$, provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Tema 2 [5 punti] Enunciare e provare il Teorema di Weierstrass per funzioni continue su insiemi compatti.

Tema 3 [5 punti] Provare il criterio di Cauchy sulla completezza di \mathbb{R} e discutere la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Mostrare con un esempio che tale condizione non è sufficiente.

Esercizio 1 [3 punti] Discutere la continuità e determinare l'immagine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(2x - 1) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 + \sqrt{x - 1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 [3 punti] Discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3 [3 punti] Determinare il limite della seguente successione a_n definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_0 = \alpha \in (-1, 2).$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\tan(x^2)}.$$