Appello C di AM110 - 4/6/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 La funzione risulta continua su $\mathbb{R}$. Infatti, la continuitá per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ segue come composizione di funzioni elementari continue. Per $x = 0, 1$ la continuitá segue invece da

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1.$$

Poiché f risulta biettiva da $(-\infty, 0)$ in $(-\infty, 0)$, da $(0, 1)$ in $(0, 1)$ e da $(1, +\infty)$ in $(1, +\infty)$, abbiamo che $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

Esercizio 2 Se $|\frac{x}{2(x+1)}| \geq 1$ la condizione necessaria non vale e la serie non converge. Per $|\frac{x}{2(x+1)}| < 1$ applichiamo il criterio di condensazione di Cauchy alla serie dei moduli. Dobbiamo studiare la serie

$$\sum_n 2^n |\frac{x}{2(x+1)}|^{2^{\frac{n}{2}}},$$

che converge per il criterio della radice quando $|\frac{x}{2(x+1)}| < 1$. Abbiamo quindi convergenza assoluta per $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$, non convergenza altrimenti.

Esercizio 3 Abbiamo per induzione che $a_n \in [0, 2]$ per $n \geq 1$. Siccome $a_{n+1} \geq a_n$ equivale a $-1 \leq a_n \leq 2$, abbiamo che la successione a_n cresce in maniera monotona ad un limite $l \in [0, 2]$. Siccome $l = \sqrt{2 + l}$, otteniamo che $l = 2$.

Esercizio 4 Da

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{n-1}{n})^{-n} = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$$

otteniamo che $(\frac{n-1}{n})^{-n} \geq 2$ per n grande. Poiché quindi

$$0 \leq (\frac{n-1}{n})^{n^2} \leq 2^{-n},$$

dal teorema del confronto otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{n-1}{n})^{n^2} = 0.$$

Per il secondo limite abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0} e^{-2x} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{(e^x - e^{-x})^2} (\frac{e^{2x} - 1}{2x})^2 \frac{4x^2}{\tan(x^2)} = -2.$$