

Appello A di AM110 - 9/1/2013

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Gli studenti interessati al recupero di uno dei due esoneri devono svolgere in due ore solo la parte corrispondente, tenendo presente che i punteggi saranno poi moltiplicati per un fattore $\frac{3}{2}$. Gli altri studenti avranno invece tre ore di tempo per il compito, svolgendo a scelta SOLO 3 temi e 5 esercizi.

Parte I

Tema 1 [5 punti] Fornire la definizione di estremo superiore e provarne l'esistenza per insiemi limitati superiormente.

Tema 2 [5 punti] Enunciare e provare la caratterizzazione dell'estremo superiore.

Esercizio 1 [3 punti] Determinare estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo /minimo, dell'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ove la successione a_n è così definita:

$$a_n = \begin{cases} \frac{2n-4}{n+1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{-(n-5)^2} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Esercizio 2 [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2n}} + 3^n}{\sqrt{1 + 16^n} + 3^n}.$$

Esercizio 3 [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4 + n}}{n^2} \right)^{n^2 \ln n}.$$

Parte II

Tema 3 [5 punti] Provare il criterio di Cauchy sulla completezza di \mathbb{R} e discutere la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Mostrare con un esempio che tale condizione non è sufficiente.

Tema 4 [5 punti] Enunciare e provare il Teorema di Weierstrass per funzioni continue su insiemi compatti.

Esercizio 4 [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)}.$$

Esercizio 5 [3 punti] Discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(x + \frac{1}{n})^{\ln n}}.$$

Esercizio 6 [3 punti] Data la successione a_n definita per ricorrenza come

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{4a_n},$$

mostrare che $a_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ per $n \geq 1$ e determinare il limite di tale successione.