Appello A di AM110 - 9/1/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Siccome $0 < e^{-(n-5)^2} \leq 1$ e $\frac{2n-4}{n+1}$ cresce dal valore 0 (raggiunto per $n = 2$) al valore 2 per $n \to +\infty$, abbiamo che 0 è il minimo dell'insieme A mentre $\sup A = 2$ (che non è raggiunto).

Esercizio 2 Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln \frac{\sqrt{1+e^{2n}}+3^n}{\sqrt{1+16^n}+3^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \ln \left[(\frac{3}{4})^n \frac{\sqrt{\frac{1}{9^n}+(\frac{e^2}{9})^n}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{16^n}}+(\frac{3}{4})^n} \right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 3 Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{n^4+n}}{n^2} \right)^{n^2 \ln n} &= \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n^3})^{\frac{n^2 \ln n}{2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[(1+\frac{1}{n^3})^{n^3} \right]^{\frac{\ln n}{2n}} = 1.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Abbiamo che

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5 Per $x = 0$ la serie non converge perché la condizione necessaria è violata. Dal criterio asintotico, per $x > 0$ basta studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{e^2}{x})^{\ln n}.$$

La condizione necessaria garantisce che la serie diverge per $0 \leq x \leq e^2$. Per $x > e^2$, tramite il criterio di condensazione di Cauchy, ci si riporta allo studio della convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{8}{x^{\ln 2}})^n.$$

Quest'ultima è una serie geometrica che converge quando $8 < x^{\ln 2}$, ossia per $x > e^3$.

Esercizio 6 Abbiamo che la proprietá $a_{n+1} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ è equivalente ad $a_n > 0$. Per induzione si dimostra che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$, e quindi $a_n > \frac{\sqrt{2}}{2}$ per $n \geq 1$. La proprietá $a_n > \frac{\sqrt{2}}{2}$ è equivalente a $a_{n+1} < a_n$, e quindi otteniamo che a_n è decrescente per $n \geq 1$. La successione ammette quindi limite $l \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, a_1)$. Siccome l deve soddisfare

$$l = \frac{2l^2 + 1}{4l},$$

otteniamo che $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$.