AM110 - ESERCITAZIONI XVII - XVIII

4 - 6 DICEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

b) $g(x) = \sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$;

c) $h(x) = \frac{x^{\sin x}+1}{e^{\sin x}-1}$.

Soluzione.

a) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ è ben definita per:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(2k\pi, (2k+1), \pi\Big).$$

b) La funzione $g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$ è ben definita per:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x} > 0 \\ \log\left(\frac{x-1}{x}\right) \geq 0 \end{cases} \iff \frac{x-1}{x} \geq 1 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

c) La funzione $h(x) = \frac{x^{\sin x}+1}{e^{\sin x}-1}$ è ben definita per:

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{\sin x} - 1 \neq 0 \end{cases} \iff x \in (0, +\infty) \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio svolto 2. Trovare il dominio ed il codominio delle seguenti funzioni. Studiarne l'invertibilità.

a) $f(x) = \log\big[\arcsin(x^2 - 3)\big]$;

b) $g(x) = \tan\big[\arccos(\frac{x}{x+2})\big]$.

Soluzione.

a) Cominciamo col calcolare il dominio di definizione della funzione $f(x) = \log\big[\arcsin(x^2 - 3)\big]$. La funzione è ben definita per:

$$\begin{cases} (x^2 - 3) \in [-1, 1] \\ \arcsin(x^2 - 3) > 0 \end{cases} \iff 0 < x^2 - 3 \leq 1 \iff 3 < x^2 \leq 4.$$

Quindi il dominio della funzione è $\mathbb{D}(f) = \Big[-2, -\sqrt{3}\Big) \cup \Big(\sqrt{3}, 2\Big]$.

Osserviamo inoltre che:
- la funzione è pari: $f(x) = f(-x)$;
- la funzione è crescente in $\Big(\sqrt{3}, 2\Big]$: infatti, è composizione di funzioni crescenti in tale regione;
- usando la parità della funzione si può dedurre che la funzione è decrescente in $\Big[-2, -\sqrt{3}\Big)$;
- la funzione non è limitata inferiormente in quanto

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = -\infty;$$

- la funzione ha due massimi globali in $x = \pm 2$, dove $f(\pm 2) = \log \frac{\pi}{2}$.

In conclusione, il codominio della funzione è $f(\mathbb{R}) = \Big(-\infty, \log \frac{\pi}{2}\Big]$.

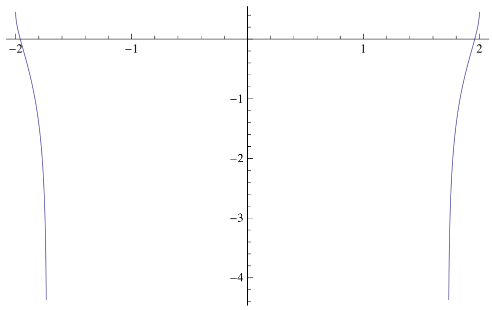

FIGURE 1

La funzione non è chiaramente iniettiva (in quanto pari), quindi non è globalmente invertibile. Si possono però trovare due inverse locali, rispettivamente in $\Big[-2, -\sqrt{3}\Big)$ ed in $\Big(\sqrt{3}, 2\Big]$. Infatti:

$$\begin{aligned} y = \log\big[\arcsin(x^2 - 3)\big] \quad &\iff \quad e^y = \arcsin(x^2 - 3) \\ &\iff \quad \sin e^y = x^2 - 3 \\ &\iff \quad x = \pm\sqrt{3 + \sin e^y}. \end{aligned}$$

b) Calcoliamo il dominio di definizione della funzione $g(x) = \tan\big[\arccos(\frac{x}{x+2})\big]$. La funzione è ben definita per:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} \in [-1, 1] \\ \arccos\left(\frac{x}{x+2}\right) \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{x}{x+2} \in [-1, 1] \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che il dominio della funzione è dato quindi da $\mathbb{D}(g) = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Osserviamo inoltre che:
- la funzione è strettamente negativa per $x \in (-1, 0)$ e si annulla solamente in $x = -1$;

- la funzione è strettamente positiva per $x > 0$;
- la funzione è decrescente in $[-1, 0)$ ed in $(0, +\infty)$.
- la funzione non è limitata inferiormente, né superiormente:

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} g(x) = \pm\infty.$$

In conclusione, il codominio della funzione è $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e la funzione è iniettiva.

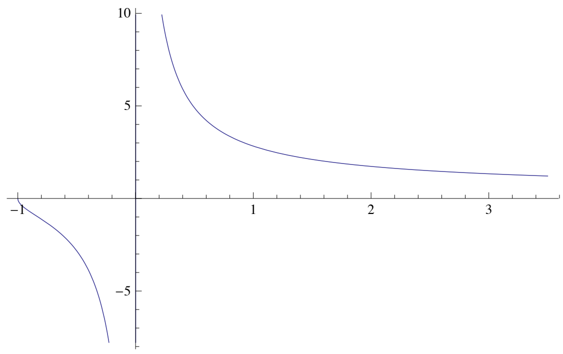

FIGURE 2

Troviamo la funzione inversa $y = g^{-1}(x)$. Usando il fatto che $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y^2 &= \tan^2\left[\arccos\left(\frac{x}{x+2}\right)\right] = \frac{1}{\cos^2\left[\arccos\left(\frac{x}{x+2}\right)\right]} - 1 = \\ &= \frac{(x+2)^2}{x^2} - 1 = \frac{4x+4}{x^2}. \end{aligned}$$

Quindi $x = g^{-1}(y)$ è soluzione dell'equazione $y^2x^2 - 4x - 4 = 0$, che ha soluzioni:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 + 4y^2} = 2\Big(1 \pm \sqrt{1 + y^2}\Big).$$

Poiché $g^{-1}(y) > 0$ per $y > 0$, $g^{-1}(y) < 0$ per $y < 0$ e $g^{-1}(0) = -1$, possiamo concludere:

$$x = g^{-1}(y) = \begin{cases} 2\big(1 + \sqrt{1+y^2}\big) & \text{per } y > 0 \\ -1 & \text{per } y = 0 \\ 2\big(1 - \sqrt{1+y^2}\big) & \text{per } y < 0. \end{cases}$$

Esercizio svolto 3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a(x) = a|x| + x$ è invertibile.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che per $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = \begin{cases} (a+1)\,x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ (1-a)\,x & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- Se $a = -1$, la funzione non è invertibile. Infatti, $f_{-1}(x) \equiv 0$ per $x \geq 0$.
- Se $a = 1$, la funzione non è invertibile. Infatti, $f_1(x) \equiv 0$ per $x \leq 0$.

- Se $a > 1$, la funzione non è iniettiva. Infatti, per ogni $y > 0$ si ha:

$$f_a^{-1}(y) = \left\{ \frac{y}{a+1}, \frac{y}{1-a} \right\}.$$

In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

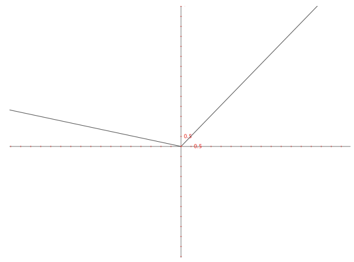

FIGURE 3

- Se $a < -1$, la funzione non è iniettiva. Infatti, per ogni $y < 0$ si ha:

$$f_a^{-1}(y) = \left\{ \frac{y}{a+1}, \frac{y}{1-a} \right\}.$$

In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

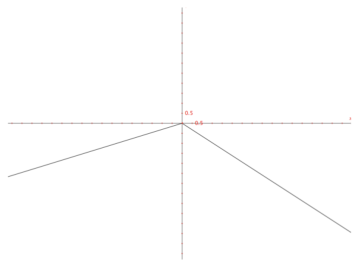

FIGURE 4

- Se $-1 < a < 1$, la funzione è iniettiva e

$$f_a^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1+a} & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ \frac{y}{1-a} & \text{per } y < 0. \end{cases}$$

In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

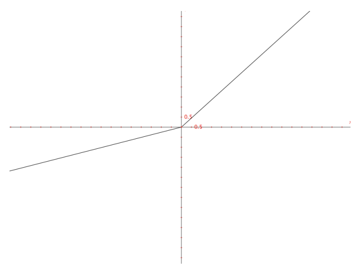

FIGURE 5

Esercizio aggiuntivo 1. Si consideri la seguente funzione:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^2+2 & \text{per } x > 0 \\ x^4 - \alpha & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Per quali valor di $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α è invertibile?
2. Per quali valor di $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?
3. Per $\alpha = -4$, determinare il dominio, il codominio e l'inversa di f_α.