AM110 - ESERCITAZIONI XV - XVI

28 - 29 NOVEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche al variare del parametro x:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin x^n}{n+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}$, $x > 1$.

Soluzione.

a) Studiamo la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n! x^n}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! |x|^n}{n^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,|x|^n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}|x| = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}|x| = \\ &= \frac{|x|}{e}. \end{aligned}$$

Quindi, se $|x| < e$ la serie converge assolutamente.

Dimostriamo ora che se $|x| \geq e$ la serie non può convergere in quanto non è verificata la condizione necessaria di Cauchy. Infatti, sia $a_n = \frac{n! x^n}{n^n}$. Dimostriamo che $a_n \not\to 0$ per $n \to +\infty$. Infatti, poiché $|x| \geq e$ ed usando il fatto che $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$ per ogni n, si ottiene:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{|x|}{e} \geq 1.$$

Quindi la successione $|a_n|$ è una successione crescente di numeri reali positivi. Ovviamente non può convergere a zero.

Riassumendo:

– la serie converge assolutamente per $|x| < e$;

– la serie non converge per $|x| \geq e$. In particolare, diverge positivamente per $x \geq e$.

b) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n(1-x)}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq 1 \\ -\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $|x| > 1$ (in particolare diverge negativamente se $x > 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $|x| \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n(1-x)}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n(1-x)}{n}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n(1-x)}{n}} = \begin{cases} |x| & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Quindi la serie converge assolutamente se $x \in (-1, 1]$ (osserviamo che per $x = 1$ la serie è identicamente nulla).

Vediamo che succede per $x = -1$. La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n}.$$

Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1]$;
– la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;
– la serie non converge per $|x| > 1$. In particolare, diverge negativamente per $x > 1$.

c) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} n^x\, x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \nexists & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ (in particolare diverge positivamente se $x \geq 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $x \in [-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^x\, x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^x\, |x|^n.$$

Applichiamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^x\,|x|^n} = |x|.$$
Quindi la serie converge assolutamente se $|x| < 1$.

Vediamo che succede per $x = -1$. La serie diventa:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$
Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:
- la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1)$;
- la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;
- la serie non converge per $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. In particolare, diverge positivamente per $x > 1$.

d) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \le 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x < -1. \end{cases}$$
Quindi la serie non può convergere se $|x| > 1$ (in particolare diverge positivamente se $x > 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $|x| \le 1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1+nx^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1+nx^2}.$$
Applichiamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+nx^2}} = |x|.$$
Quindi la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Vediamo che succede per $x = \pm 1$.
- Per $x = 1$ la serie diventa:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = +\infty.$$
- Per $x = -1$ la serie diventa:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}.$$
  Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:
- la serie converge assolutamente per $|x| < 1$;
- la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;

– la serie diverge positivamente se $x = 1$;
– la serie non converge per $|x| > 1$. In particolare, diverge positivamente per $x > 1$.

e) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin x^n}{n + x^{2n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \\ \sin 1 & \text{se } x = 1 \\ \nexists & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $x = \pm 1$ (in particolare diverge positivamente se $x = 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $x \neq \pm 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \sin x^n}{n + x^{2n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}}.$$

Se $|x| > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + x^{2n}} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{2n}} = \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x^2} \right)^n < +\infty \end{aligned}$$

(quest'ultima serie converge, ad esempio, per il criterio della radice). Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| > 1$.

Se $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + x^{2n}} |x|^n \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < +\infty \end{aligned}$$

(quest'ultima serie converge, ad esempio, per il criterio della radice). Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $x \neq \pm 1$;
– la serie non converge per $|x| = \pm 1$. In particolare, diverge positivamente per $x = 1$.

f) Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi. Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > e \\ 1 & \text{se } x = e \\ +\infty & \text{se } 1 < x < e \end{cases}$$

Quindi la serie diverge positivamente se $1 < x \leq e$.

Studiamo la convergenza quando $x > e$. Il termine $\frac{1}{(\log x)^{\log n}}$ è positivo e decrescente; quindi, possiamo applicare il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log x)^{\log 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(\log x)^{n \log 2}} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(\log x)^{\log 2}}\right]^n = \begin{cases} < +\infty & \text{se } x > e^{2^{\frac{1}{\log 2}}} \\ +\infty & \text{se } x \leq e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}. \end{cases}$$

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $x > e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}$;
– la serie diverge positivamente per $1 < x \leq e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}$.

Esercizio svolto 2. Consideriamo le seguenti due serie:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$
$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t_n := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

(osservare che si tratta di un riordinamento della stessa serie). Si denoti con S_N e T_N le rispettive somme parziali e con $H_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

a) Si dimostri che:

$$S_{2N} = H_{2N} - H_N \qquad \text{e} \qquad T_{3N} = H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N.$$

b) Si dimostri che le due serie sono entrambi convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sigma \neq 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{3}{2}\sigma.$$

In particolare, le due serie convergono a valori diversi, nonostante siano – a meno di un riordinamento – la stessa serie.

Soluzione.

a) Cominciamo col dimostrare che $S_{2N} = H_{2N} - H_N$. Lo dimostreremo per induzione. La base dell'induzione (N=1) è vera:

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad H_2 - H_1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Supponiamo che sia vero per N e dimostriamolo per $N+1$:

$$\begin{aligned}
S_{2(N+1)} &= S_{2N} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \\
&= H_{2N} - H_N + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \\
&= \left(H_{2N} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}\right) - \left(H_N + \frac{1}{N+1}\right) = \\
&= H_{2(N+1)} - H_{N+1}.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'altra uguaglianza: $T_{3N} = H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N$. Osserviamo innanzitutto che la somma è della forma:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

Dimostriamo l'uguaglianza per induzione. La base dell'induzione ($N = 1$) è verificata:

$$\begin{aligned}
&T_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \\
&H_4 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che sia vera per N e dimostriamola per $N+1$:

$$\begin{aligned}
T_{3(N+1)} &= T_{3N} + \frac{1}{4(N+1)-3} + \frac{1}{4(N+1)-1} - \frac{1}{2(N+1)} = \\
&= H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N + \frac{1}{4N+1} + \frac{1}{4N+3} - \frac{1}{2N+2)} = \\
&= \left(H_{4N} + \frac{1}{4N+1} + \frac{1}{4N+2} + \frac{1}{4N+3} + \frac{1}{4N+4}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(H_{2N} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}\right) - \frac{1}{2}\left(H_N + \frac{1}{N+1}\right) = \\
&= H_{4(N+1)} - \frac{1}{2}H_{2(N+1)} - \frac{1}{2}H_{N+1}.
\end{aligned}$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ converge per il criterio di Leibniz. In particolare, denotiamo

$$\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$

Osserviamo che $\sigma > 0$. Infatti, si verifica facilmente (ad esempio per induzione) che $S_N \geq \frac{1}{2}$ per ogni N (quindi $\sigma \geq \frac{1}{2}$).

Studiamo ora la convergenza della seconda serie: $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.
Innanzitutto, osserviamo che (usando le uguaglianze del punto a)):

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} T_{3N} &= \lim_{N\to+\infty} \left(H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N \right) = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[(H_{4N} - H_{2N}) + \frac{1}{2}(H_{2N} - H_N) \right] = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[S_{4N} + \frac{1}{2}S_{2N} \right] = \\
&= \sigma + \frac{1}{2}\sigma = \\
&= \frac{3}{2}\sigma.
\end{aligned}$$

Inoltre si verifica facilmente che ($[\,\cdot\,]$ denota la parte intera):

$$T_{3\,[\frac{N}{3}]} \le T_N \le T_{3\,([\frac{N}{3}]+1)},$$

Usando il Teorema dei carabinieri possiamo concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \lim_{N\to+\infty} T_N = \frac{3}{2}\sigma.$$

Esercizio svolto 3. Dimostrare che ogni successione reale $\{a_n\}_n$ ammette una sotto-successione monotòna crescente o decrescente. Si deduca da ciò il teorema di Bolzano–Weierstrass.

Soluzione. Innanzitutto, diremo che a_N *è un "picco" della successione* se $a_N \ge a_n$ per ogni $n \ge N$.

Bisogna distinguere vari casi: i) esistono infiniti picchi della successione; ii) esiste un numero finito di picchi; iii) non esistono picchi. Osserviamo che tutte e tre le ipotesi possono presentarsi. Ad esempio, se la successione è decrescente, allora ogni elemento è un picco (caso i)); se la successione è strettamente crescente, allora non esistono picchi (caso iii)); è facile combinare i due casi per ottenere un esempio in cui ci sono solamente un numero finito di picchi (esercizio).

- Caso i): Denotiamo i picchi con $a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_k}, \ldots$, dove $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$.
  Segue facilmente dalla definizione di picco che $a_{N_1} \ge a_{N_2} \ge \ldots \ge a_{N_k} \ldots$.
  Quindi $\{a_{N_k}\}_k$ è una sottosuccessione monotòna decrescente.

- Caso ii): Denotiamo i picchi con $a_{N_1}, a_{N_2}, \ldots, a_{N_k}$, dove $N_1 < N_2 < \ldots < N_k$.
  Segue dalla definizione di picco che $a_{N_1} \ge a_{N_2} \ge \ldots \ge a_{N_k}$.
  Osserviamo ora che a_{N_k+1} non può essere un picco. Quindi esisterà $n_1 > N_k + 1 =: n_0$, tale che $a_{n_1} > a_{n_0}$. Allo stesso modo a_{n_1} non può essere un picco. Quindi esisterà $n_2 > n_1$, tale che $a_{n_2} > a_{n_1}$. E cosi' via... Concludendo, otteniamo una sottosuccessione $\{a_{n_j}\}_j$ che è monotòna (strettamente) crescente.

- Caso iii): È completamente analogo al caso ii). Basta scegliere $n_0 = 1$ e procedere come sopra.

Vediamo ora come dedurre il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Sia $\{a_n\}_n$ una successione limitata (superiormente ed inferiormente). Per il punto precedente, sappiamo che esiste una sottosuccessione monotòna $\{a_{n_j}\}_j$. Tale sottosuccessione è anch'essa limitata, quindi è convergente.

Esercizio svolto 4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme con cardinalità più che numerabile. Si dimostri che esiste $\{a_n\}_n \subset A$ convergente.

Soluzione. Osserviamo che A non è necessariamente limitato. Riscriviamo A nel seguente modo:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A \cap [n, n+1) =: \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n.$$

Possiamo concludere che almeno uno degli A_n deve avere cardinalità più che numerabile. Se così non fosse, infatti, si avrebbe un'unione numerabile di insieme con cardinalità al più numerabile; tale unione – cioè A – avrebbe cardinalità al più numerabile (contraddizione!).

Supponiamo che $A_{n_0} = A \cap [n_0, n_0 + 1)$ abbia cardinalità più che numerabile. Scegliamo una qualsiasi successione a valori in A_0. Segue dal teorema di Bolzano Weierstrass che tale successione ammette una sottosuccessione convergente. E questo conclude la dimostrazione.

Esercizio aggiuntivo 1. Si può scrivere l'intervallo aperto $(0, 1)$ come unione disgiunta (eventualmente più che numerabile) di intervalli chiusi non degeneri (cioè, non costituiti da un solo punto) ?