AM110 - ESERCITAZIONI XI - XII

20 - 22 NOVEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n!}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n}$ con $x \in \mathbb{R}$

Soluzione.

a) Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi e che la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 0$. Osserviamo ora che se $n \geq 2$:

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!} \leq \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Usando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} < +\infty,$$

quindi la serie converge.

In particolare, è possibile calcolare esattamente il valore della somma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{(N+1)!} = 1.\end{aligned}$$

b) Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi e che la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0$. Usando il fatto che $\log(1+x)\le x$ per ogni $x\ge 0$, si ottiene (per $n\ge 2$):

$$\begin{aligned}-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \le \frac{n^2}{n^2-1}-1 = \\ &= \frac{1}{n^2-1}\le\frac{2}{n^2}.\end{aligned}$$

Usando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}<+\infty,$$

quindi la serie converge.

In particolare, è possibile calcolare esattamente il valore della somma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{N\cdot N}{(N-1)(N+1)}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\frac{2N}{N+1}\right) = \\ &= \log 2\,.\end{aligned}$$

c) Usando il fatto che $\log(1+x)\le x$ per ogni $x\ge 0$, si ottiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\ge\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

quindi la serie diverge positivamente.

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ diverge negativamente. Infatti, è a termini negativi e non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)=-\infty.$$

e) Cominciamo con l'osservare che (dimostrarlo come esercizio)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Quindi, segue dalla definizione di limite che esiste un N_0 tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$\frac{\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Applicando il criterio del confronto si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{N_0-1} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{N_0-1} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = +\infty,\end{aligned}$$

da cui segue che la serie diverge positivamente.

f) Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi. Inoltre, ricordiamo che per ogni $a, b > 0$ si ha:

$$a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Quindi, usando il criterio del confronto si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log 2}} = +\infty,$$

in quanto $\log 2 \in (0, 1)$.

g) Ragionando come in (f) ed usando il fatto che $n! \geq n^2$ per $n \geq 4$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n!}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} = \\ &= \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} = \\ &\leq \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{2\log 2}} < +\infty,\end{aligned}$$

in quanto $2\log 2 = \log 4 > 1$.

h) Si tratta di una serie a termini positivi. Possiamo applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{(n!)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0 < 1,$$

quindi la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n} < +\infty.$$

i) Cominciamo con l'osservare che:

$$a_n \quad := \quad \frac{1}{\binom{4n}{3n}} = \frac{(3n)! \cdot n!}{(4n)!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad &= \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(3(n+1))! \cdot (n+1)!}{(4(n+1))!} \cdot \frac{(4n)!}{(3n)! \cdot n!} = \\
&= \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = \\
&= \quad \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256} < 1.
\end{aligned}$$

Quindi la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}} < +\infty.$$

l) Si tratta di una serie a termini positivi. Cominciamo con l'osservare che per ogni $\alpha > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\alpha}}{(\log n)^{\log n}} \quad &= \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\alpha \log n}}{e^{\log n \log(\log n)}} = \\
&= \quad \lim_{n \to +\infty} e^{\alpha \log n - \log n \log(\log n)} = \\
&= \quad \lim_{n \to +\infty} e^{\log n (\alpha - \log(\log n))} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\alpha, \varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$ si ha:

$$\frac{n^{\alpha}}{(\log n)^{\log n}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \frac{\varepsilon}{n^{\alpha}}.$$

Scegliendo $\alpha > 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \quad &= \quad \sum_{n=1}^{N_0 - 1} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \\
&\leq \quad \sum_{n=1}^{N_0 - 1} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^{\alpha}} < +\infty.
\end{aligned}$$

m) Studiamo la serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Caso $\alpha \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \quad &= \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{|\alpha|}}{n} \geq \\
&\geq \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log 2)^{|\alpha|}}{n} = +\infty.
\end{aligned}$$

  Quindi la serie diverge positivamente per $\alpha \leq 0$.

- Caso $\alpha > 0$: applichiamo il criterio di condensazione di Cauchy. Le condizioni del criterio sono soddisfatte in quanto il termine n-simo della serie è non negativo, decrescente e tende a zero. Quindi il comportamento della serie è equivalente al comportamento della seguente serie "condensata":

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log 2)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

n) Cominciamo col verificare per quali valori di x la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{x}{5}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 5 \\ +\infty & \text{se } x \geq 5 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

Dobbiamo quindi considerare soltanto i valori di $x \in (-5, 5)$. Dimostriamo che la serie converge assolutamente per tali valori. Infatti, applicando il criterio della radice (alla serie dei valori assoluti) si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 |x|^n}{5^n}} = \frac{|x|}{5} < 1,$$

quindi la serie dei valori assoluti è convergente.

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } |x| < 5 \\ +\infty & \text{se } x \geq 5 \\ \text{non converge} & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

Esercizio aggiuntivo 1. Discutere il comportamento della seguenti serie numerica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\,[\log(\log n)]^\alpha}.$$