Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 1: Principio di Induzione, Estremo inferiore e superiore

Nel seguito, $\mathbb{N}$ denoterà l'insieme dei numeri naturali *strettamente positivi* (i.e., $0 \notin \mathbb{N}$).

Esercizio 1.1. Provare per induzione che le seguenti relazioni valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$:

(1.1.1) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

(1.1.2) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$,

(1.1.3) $\sum_{k=0}^{n} (4k+1) = (2n+1)(n+1)$,

(1.1.4) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$,

(1.1.5) $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, dove $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

(1.1.6) $n^n \geq n!$.

Esercizio 1.2. Trovare l'errore nella dimostrazione della seguente Proposizione:

Proposizione. *Tutti gli studenti ottengono lo stesso voto ad ogni esame.*
Dimostrazione. Indichiamo con v_k il voto del k^{o} studente. Proveremo per induzione sul numero n degli studenti che $V_n := \{v_1, \cdots, v_n\} = \{v_1\}$. La base induttiva è ovvia, poiché l'insieme V_1 contiene per definizione un solo elemento. Supponiamo quindi che l'ipotesi sia vera fino a $n > 1$, e proviamola per $n+1$. Possiamo scrivere l'insieme V_{n+1} come $V_{n+1} = V' \cup V''$, dove $V' = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $V'' = \{v_2, \cdots, v_{n+1}\}$. Poiché gli insiemi V' e V'' hanno cardinalità n, dall'ipotesi induttiva abbiamo che $v_1 = \cdots = v_n$ e $v_2 = \cdots = v_{n+1}$, cioè $v_1 = v_j$ per ogni $j = 1, \cdots, n+1$, che era quello che volevamo dimostrare.$\square$

Esercizio 1.3. Calcolare estremo superiore ed inferiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A := \left\{ \frac{n-1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B := \left\{ \frac{1}{n^2} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C := \left\{ \frac{(-1)^n}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$D := \left\{ xy \middle| x \in [-1,2],\ y \in [-3,-1) \right\}, \quad E := (0,2) \cup \left\{ 3 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 1.4. Si considerino due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ della forma $A := \left\{ a_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, $B := \left\{ b_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$, e si definiscano

$$A \sharp B := \left\{ a_n + b_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A \circ B := \left\{ a_n b_n \middle| n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Provare che, in generale, $\sup A \sharp B \neq \sup A + \sup B$ e $\sup A \circ B \neq \sup A \sup B$. Discutere inoltre la validità delle relazioni $\sup A \sharp B \leq \sup A + \sup B$ e $\sup A \circ B \leq \sup A \sup B$.

Esercizio 1.5. Sfruttare il principio di induzione per rispondere ai punti seguenti:

(1.5.1) *Disuguaglianza di Stirling semplificata*: dimostrare che $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$ (ricordiamo che $e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \middle| n \in \mathbb{N} \right\} \in (2,3)$ e $n! := \prod_{j=1}^{n} j = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$);

(1.5.2) *Formula di Binet*: sia $\{f_n\}$ la successione di Fibonacci, che è definita per ricorrenza come

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1, \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}. \end{cases}$$

Provare che $f_n = \frac{\tau^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}$ $\forall n \geq 1$, dove $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è il *numero aureo* e $\varphi := -\tau^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è il *numero di Fidia*;

(1.5.3) Ricordiamo che lo (n,k)-*coefficiente binomiale* (o più semplicemente *n scelgo k*) è per definizione $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Verificare (con un calcolo diretto) che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (quando tali simboli sono definiti). Quindi, provare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1};$$

(1.5.4) Provare che $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} < \frac{3}{4}$ per ogni $n \geq 1$.