Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 6: Serie numeriche. Elementi di topologia di $\mathbb{R}$.

Soluzione Esercizio 6.1.

(6.1.1) Prima di tutto, stabiliamo per quali $x \in \mathbb{R}$ ha senso considerare la serie. Sicuramente, deve essere $x > 0$ per poter definire $\log(x)$, e $x \neq 1$ (altrimenti $\log(1) = 0$). Neanche gli $x \in (0,1)$ sono leciti (se $n > 1$, $(-1)^{\log(n)}$ non ha senso nei reali[(1)] !). Limitiamoci quindi a considerare $x > 1$. Per il criterio di condensazione di Cauchy

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(x)^{\log(n)}} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{\log(x)^{n\log(2)}} = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{\log(x)^{\log(2)}}\right)^n.$$

Quindi la serie è convergente se e solo se $\frac{2}{\log(x)^{\log(2)}} < 1$, e questo avviene se e solo se $x > e^e$.

(6.1.2) Notiamo che

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos(k\pi) = (-1)^k, & \text{se } n = 2k \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } n = 2k+1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Possiamo scrivere allora

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n\frac{\pi}{2})}{\log(\log(\log(n)))} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log(\log(2n)))}.$$

Applicando il criterio di Leibniz, si ottiene che la serie proposta è convergente. La serie diverge assolutamente, come si verifica facilmente confrontandola con la serie armonica.

(6.1.3) La serie è divergente: infatti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n^3+17}}{\sqrt{n+2}} = \infty.$$

(6.1.4) La serie è divergente (cfr. Tutorato 5).

(6.1.5) La serie è divergente: infatti, il termine generale non è infinitesimo, poiché

$$\frac{e^{n^2}}{n!} > \frac{e^{n^2}}{n^n} = e^{n(n-\log(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

(6.1.6) La serie è convergente. Prima di tutto, vediamo che il termine generale è infinitesimo: dalla disuguaglianza di Stirling semplificata, abbiamo

$$\frac{e^n}{n!} < \frac{e^{2n}}{n^n} = e^{n(2-\log(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

E, ovviamente, $\frac{1}{n!} \to 0$. Scriviamo quindi

$$\sum_{n\geq 0} \frac{e^n+1}{n!} = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{e^n}{n!}}_{<e^{n(2-\log(n))}} + \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}}_{\text{convergente}}.$$

Facciamo ora vedere che se n è sufficientemente grande, allora $e^{n(2-\log(n))} \leq 2^{-n}$, cioè che la serie è convergente (per il criterio del confronto). Abbiamo

$$e^{n(2-\log(n))} \leq 2^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad n\log(2) \leq n\left(\log(n)-2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \log(2) \leq \log(n) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2e^2.$$

Quindi, $e^{n(2-\log(n))} \leq 2^{-n}$ se $n \geq N := \left[2e^2\right] + 1$.

---

(1) In generale, nei reali, non ha senso valutare $(-1)^r$, con $r \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ (si pensi ad $r = \frac{1}{2}$). Sarebbe quindi sufficiente verificare che $\log(n)$ non è un intero per concludere che, in generale, la quantità $(-1)^{\log(n)}$ non è definita. Proveremo di più, cioè che $\log(n) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$: infatti, se $\log(n) = \frac{p}{q}$ per qualche $p, q \in \mathbb{N}$ coprimi tra loro, otteniamo $n^q = e^p$, cioè che e è radice del polinomio a coefficienti razionali $X^p - n^q \in \mathbb{Q}[X]$. Quindi e è algebrico, assurdo.

(6.1.7) $|\sin(n) + \cos(n)| \leq 2$, quindi la serie converge assolutamente.

(6.1.8) Se $x = 0$, si ottiene una somma di zeri, e quindi la serie è convergente. Se $|x| = 1$, il termine generale è $\frac{1}{n^2+1}$, e quindi la serie è convergente. Se $|x| > 1$ e n è sufficientemente grande, allora $n^2 \leq x^{2n}$, e quindi

$$\frac{x^{2n}}{n^2 + x^{2n}} \geq \frac{x^{2n}}{2x^{2n}} = \frac{1}{2} \quad \text{(per } n \text{ sufficientemente grande).}$$

In particolare, la serie è divergente. Se invece $0 < |x| < 1$, allora

$$\frac{x^{2n}}{n^2 + x^{2n}} < \frac{x^{2n}}{n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Per il criterio del confronto, la serie risulta essere convergente.

(6.1.9) La serie è divergente (criterio di Leibniz).

(6.1.10) Poiché $\frac{x+1}{n} \to 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, esisterà un $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tale che $\left|\frac{x+1}{n}\right| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq N$. Si conclude quindi che la serie è assolatamente convergente (e quindi convergente) per ogni $x \in \mathbb{R}$, grazie al criterio del confronto.

Soluzione Esercizio 6.2.

(6.2.1) $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(6.2.2) È

$$a_n := \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \equiv 0, 2 \pmod 4, \\ 1 & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

e, chiaramente, $-1 \leq a_n \leq 1$. Siano $n_k := 4k+1$ ed $m_k := 4k+3$. Allora $a_{n_k} \equiv 1$ e $a_{m_k} \equiv -1$. Quindi $\liminf_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e $\limsup_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(6.2.3)

$$\frac{1 + (-1)^n}{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } 2|n, \\ -1 + \frac{2}{n+1} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi il $\liminf$ è -1, mentre il $\limsup$ è 1 (poiché $a_{2n} \equiv 1$ e $a_{2n+1} \xrightarrow{-1}$).

(6.2.4) Naturalmente, $b_n \geq 1$ per ogni n. Sia $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un'enumerazione dei numeri primi. Poniamo quindi $n_k := p_k$ e $m_k := \prod_{j=1}^k p_j$. Allora

$$b_{n_k} \equiv 1, \qquad b_{m_k} = k \to \infty.$$

Si ha dunque $\liminf_{n\to\infty} b_n = 1$ e $\limsup_{n\to\infty} b_n = +\infty$

(6.2.5) La successione converge a 0, quindi il limite inferiore e superiore coincidono e valgono 0.

(6.2.6) Il limite della successione è $+\infty$ indipendentemente da $x \in \mathbb{R}$. Quindi $\liminf$ e $\limsup$ coincidono e valgono $+\infty$.

Soluzione Esercizio 6.3.

(6.3.1) Dalla disuguaglianza di Stirling semplificata, otteniamo

$$\frac{(n^2)!}{n^n} > \frac{(n^2)^{n^2}}{e^{n^2} n^n} = \frac{n^{2n^2-n}}{e^{n^2}} = \exp\left(n^2\left(2\log(n) - 1 - \frac{\log(n)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

(6.3.2) La successione non converge (cfr. (6.2.3)).

(6.3.3) Abbiamo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n$. Poi, se n è sufficientemente grande, si ha $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - 1$. Quindi, per ogni $n \geq N$ (per un qualche $N \in \mathbb{N}$, che sappiamo esistere) si ha

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n \geq (e-1)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

(6.3.4) Abbiamo

$$1 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \le e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Soluzione Esercizio 6.4.

(6.4.1) $\left\{x \in \mathbb{R}\middle| x^2+3x+1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right\} \cup \left\{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right\} \equiv \{x_1\} \cup \{x_2\}$ è chiuso essendo unione di due chiusi. Tale insieme è privo di punti di accumulazione, come si può verificare facilmente considerando gli intorni

$$\left(x_i - \frac{|x_1-x_0|}{2}, x_i + \frac{|x_1-x_0|}{2}\right), \qquad i \in \{1,2\}\,.$$

(6.4.2) $T := \left\{n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è aperto (*ad esempio*, si può notare che $(1-r, 1+r)$ non è contenuto in T per ogni $r > 0\ldots$). Inoltre, T non è chiuso: questo segue subito dal fatto che il suo derivato è $\mathscr{D}T = \{0\}$ e $0 \notin T$. Che 0 sia un punto di accumulazione segue immediatamente dalla definizione. Supponiamo ora che $x \in \mathscr{D}T$. Allora, esisterà una successione $\{x_k\} \subset T$, con $\frac{1}{n_k} = x_k \neq x_\ell$ se $k \neq \ell$ tale che $x_k \to x$ per $k \to \infty$. Poniamo $\mathcal{N} := \left\{n_k\middle| k \in \mathbb{N}\right\}$. Ci sono due possibilità: o $\#\mathcal{N} = \infty$, oppure $\#\mathcal{N} < \infty$. Nel primo caso, si ha necessariamente $n_{k_j} \to \infty$ per una sottosuccessione $\{k_j\}$, e quindi

$$0 \xleftarrow[j\to\infty]{} \frac{1}{n_{k_j}} = x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x.$$

Per l'unicità del limite, $x = 0$. Se fosse invece $\#\mathcal{N} < \infty$, otterremmo un assurdo, poiché si avrebbe in particolare che uno degli elementi di $\mathcal{N}$ si ripete infite volte, in contraddizione con l'ipotesi che gli elementi della successione $\{x_k\}$ siano tutti distinti. Quindi, $\overline{T} = T \cup \{0\}$.

(6.4.3) $S := \{1 < |x-2| < 2\} = (0,1) \cup (3,4)$. Essendo unione di intervalli aperti, S è aperto. Inoltre, $\mathscr{D}S = [0,1] \cup [3,4]$.

(6.4.4) $U := \left\{n^{-1} + m^{-1}\middle| n, m \in \mathbb{N}\right\}$ non è né aperto né chiuso, e $\mathscr{D}U = \overline{T}$, dove T è stato definito in (6.4.2). Sia $x \in \overline{T}$. Allora, o $x = 0$, oppure $x = n^{-1}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Poiché $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ ($\frac{1}{n} \in U$ poiché $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\ldots$) e $n^{-1} = \lim_{m\to\infty}\left(n^{-1}+m^{-1}\right)$, $\overline{T} \subset \mathscr{D}U$. Proviamo ora che $\mathscr{D}U \subset \overline{T}$. Sia x un punto di accumulazione di U. Esisterà allora una successione (di punti distinti) $\{x_k\} \subset U$, $x_k = \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m_k}$, tale che $x_k \to x$ per $k \to \infty$. Poniamo, come nel punto (6.4.2), $\mathcal{N} := \left\{n_k\middle| k \in \mathbb{N}\right\}$. Consideriamo i due casi possibili: $\#\mathcal{N} < \infty$ e $\#\mathcal{N} = \infty$. Nel primo caso, almeno uno degli elementi di $\mathscr{N}$ si ripete infinite volte, cioè esiste un $n_0 \in \mathcal{N}$ tale che $\#\left\{j \in \mathbb{N}\middle| n_j = n_0\right\}$. Elenchiamo gli elementi di tale insieme come $\{k_j\}$. Quindi, $x_{k_j} = \frac{1}{n_{k_j}} + \frac{1}{m_{k_j}} \equiv \frac{1}{n_0} + \frac{1}{m_{k_j}}$. Si ha necessariamente che gli m_{k_j} sono tutti distinti: altrimenti, non lo sarebbero i punti della successione $\{x_k\}$. Allora, $\frac{1}{m_{k_j}} \to 0$ per $j \to \infty$, e quindi $x_{k_j} \to \frac{1}{n_0} \in T$. Per l'unicità del limite, $x = \frac{1}{n_0}$.
Supponiamo ora che $\#\mathcal{N} = \infty$. Allora, si troverà una sottosuccessione $k_j \to \infty$, i.e. tale che $\frac{1}{n_{k_j}} \to 0$. Poniamo quindi $\mathcal{M} := \{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Se $\#\mathcal{M} < \infty$, argomentando come prima si troverà una sottosuccessione di x_{k_j} che convergerà verso un punto $\frac{1}{m_0}$ (e, per l'unicità del limite, $x = m_0^{-1} \in T$), dove m_0 è un elemento di $\mathcal{M}$ che si ripete infinite volte. Se invece $\#\mathcal{M} = \infty$, esisterà una sottosuccessione j_ℓ tale che $\frac{1}{m_{k_{j_\ell}}} \to 0$. In particolare,

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{n_{k_{j_\ell}}} + \frac{1}{m_{k_{j_\ell}}} = 0 \in \overline{T}.$$

Quindi, $\mathscr{D}U = \overline{T}$. In particolare,

$$\overline{U} = U \cup \mathscr{D}U = U \cup T \cup \{0\} = U \cup \{0\}\,,$$

dal momento che, come già osservato, si può scrivere $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \in U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione Esercizio 6.5.

(6.5.1) Se $\alpha := \sup(A) \notin A$ non fosse un punto di accumulazione di A, esisterebbe un $r > 0$ tale che $(\alpha - r, \alpha + r) \cap A = \emptyset$. In particolare, $a \le \alpha - r\ \forall a \in A$. Contraddizione.

(6.5.2) Proviamo che $x \in \overline{A}$ se e solo se $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni U intorno di x. Se $A \cap U = \emptyset$ per qualche intorno U di x, allora $\complement U$ sarebbe un insieme chiuso contenente A, cioè $\overline{A} \subset \complement U$, e quindi $x \notin \overline{U}$.
Se invece $x \notin \overline{A}$, allora $\complement \overline{A}$ è un intorno di x disgiunto da A.

(6.5.3) Leggete bene il punto (6.5.1)...

(6.5.4) $\overline{A} \subset \widetilde{A}$: sia $x \in \overline{A}$. Per il punto (6.5.2), esisterà una successione $\{x_n\} \subset A$ tale che $x_n \to x$, cioè $d(x, x_n) \to 0$, e quindi $d(x, A) = 0$.
$\widetilde{A} \subset \widetilde{A}$: preso $x \in \tilde{A}$, esisterà una *successione minimizzante* $\{x_n\} \subset A$, cioè tale che $d(x, x_n) \to 0$. x è palesemente un punto aderente ad A, cioè $x \in \overline{A}$.

Soluzione Esercizio 6.6. Costruiamo induttivamente una successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tale che

$$a_{n_k} \leq \frac{1}{2^k}. \tag{$\star_k$}$$

Poiché $a_n \to 0$, esisterà un $N_1 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \geq N_1$. Poniamo quindi $n_1 := N_1$. Supponiamo quindi di aver costruito i primi k termini soddisfacenti la $(\star_j)$ per $j \in [1, k] \cap \mathbb{N}$, e costruiamo il termine $(k+1)$-esimo. Sempre perché $a_n \to 0$, esisterà un N_{k+1} tale che $a_n \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, per ogni $n \geq N_{k+1}$. Sarà allora sufficiente porre $n_{k+1} := \max\{n_k + 1, N_{k+1}\}$. Allora

$$\sum_{k\geq 1} a_{n_k} \leq \sum_{k\geq 1} 2^{-k} < +\infty.$$

Soluzione Esercizio 6.7. Supponiamo per assurdo che $a_n \not\to \ell$. Allora

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 \,|\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \geq N \;:\; |a_n - \ell| \geq \bar{\varepsilon}.$$

Possiamo allora costruire una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $|x_{n_k} - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$ (si ponga $n_1 := 1$ e proceda induttivamene...), in contraddizione con l'ipotesi che si possa estrarre una sotto-sottosuccessione convergente.

Soluzione Esercizio 6.8.

(6.8.1) Se $\theta \in \mathbb{Q}$, allora a_n è definitivamente nulla. In particolare, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sia ora $a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Proviamo che il limite è ancora 0. Abbiamo

$$|a_n| = \prod_{j=1}^{n} |\sin(j\pi\theta)| = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log\left(|\sin(j\pi\theta)|\right)\right).$$

Notiamo per prima cosa che tale scrittura ha senso: infatti, dal momento che θ è irrazionale, $|\sin(j\pi\theta)|$ è sempre strettamente positivo (convincersene). Assumendo quanto suggerito, esisterà una successione $\{j_k\} \subset \mathbb{N}$ tale che $\{j_k\theta\} \to 0$ per $k \to \infty$[2].

Poiché dalle formule di addizione si ha

$$|\sin(j\pi\theta)| = |\sin(\pi([j\theta] + \{j\theta\}))| = |\sin(\pi\{j\theta\})|,$$

otteniamo in particolare che, se $\mathcal{A} := \left\{ j_k \middle| k \in \mathbb{N} \right\}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \log(|\sin(j\pi\theta)|) = \sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}} \log(|\sin(j\pi\theta)|) + \sum_{j\in[1,n]\cap\complement\mathcal{A}} \underbrace{\log(|\sin(j\pi\theta)|)}_{\leq 0} \leq \sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}} \underbrace{\log(|\sin(j\pi\theta)|)}_{\to -\infty}.$$

Cioè

$$\sum_{j\geq 1} \log(|\sin(j\pi\theta)|) = -\infty.$$

Quindi, passando al limite, si ha

$$0 \leq |a_n| = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log(|\sin(j\pi\theta)|)\right) \leq \exp\left(\sum_{j\in[1,n]\cap\mathcal{A}} \log(|\sin(j\pi\theta)|)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Abbiamo quindi provato che $a_n \to 0 \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

[2] Ricordiamo che $\{\cdot\} : \mathbb{R} \to [0, 1)$ è la funzione *parte frazionaria*, cioè $\{x\} := x - [x]$, dove $[x]$ è la parte intera di x.

(6.8.2) Notiamo che

$$2\pi n!e = 2\pi n!\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} + \sum_{j\geq n+1}\frac{1}{j!}\right) = 2\pi\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}.$$

Possiamo stimare la seconda serie come

$$\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!} = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \leq$$
$$\leq \frac{1}{n+1} + \sum_{j\geq n+2}\frac{1}{j^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

poiché $\sum_{j\geq n+2}\frac{1}{j^2}$ è la coda di una serie convergente e tende quindi a zero per $n\to+\infty$. Quindi

$$\sin(2\pi n!e) = \sin\left(2\pi\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!} + \sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\right) =$$
$$= \underbrace{\sin\left(2\pi\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\right)}_{\equiv 0,\ \forall n\in\mathbb{N}}\cos\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right) + \sin\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\underbrace{\cos\left(2\pi\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}\right)}_{\equiv 1,\ \forall n\in\mathbb{N}} =$$
$$= \sin\left(2\pi\sum_{j\geq n+1}\frac{n!}{j!}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$