Tutorato di AM110

A.A. 2012/2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 6: Serie numeriche. Elementi di topologia di $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.1. Studiare la convergenza delle seguenti serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$ quando appare:

(6.1.1) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\log(x))^{\log(n)}}$, (6.1.6) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^n+1}{n}$,

(6.1.2) $\sum_{n\geqslant 3} \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\log(\log(\log(n)))}$, (6.1.7) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)+\cos(n)}{n^3}$,

(6.1.3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sqrt[3]{n^5+2n^3+17}}{\sqrt{n+2}}$, (6.1.8) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n}}{n^2+x^{2n}}$,

(6.1.4) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n a_n$, (6.1.9) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n+1}{n}$,

(6.1.5) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{n^2}+1}{n!}$, (6.1.10) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(x+1)^n}{n^n}$,

dove $a_n := \frac{1}{n}$ se n è pari e $a_n := \frac{1}{n^3}$ se n è dispari.

Esercizio 6.2. Determinare lim inf e lim sup delle seguenti successioni:

(6.2.1) $a_n := \begin{cases} ne^{-n} & \text{se } 2|n, \\ ne^n & \text{altrimenti,} \end{cases}$

(6.2.2) $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$,

(6.2.3) $\frac{1+(-1)^n n}{1+n}$,

(6.2.4) $b_n := \#\{\text{fattori primi nella decomposizione di } n\}$,

(6.2.5) $\frac{n+1}{n^2+3}$,

(6.2.6) $\frac{e^n+1}{n^x}$.

Esercizio 6.3. Calcolare (se esiste) il limite delle seguenti successioni:

(6.3.1) $\frac{(n^2)!}{n^n}$, (6.3.3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

(6.3.2) $\frac{1+(-1)^n n}{1+n}$, (6.3.4) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$.

Esercizio 6.4. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti o chiusi, e determinarne i punti di accumulazione:

(6.4.1) $\{x^2+3x+1=0\}$, (6.4.3) $\{1<|x-2|<2\}$,

(6.4.2) $\left\{\frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}$, (6.4.4) $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\middle| n,m \in \mathbb{N}\right\}$.

Esercizio 6.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Provare che:

(6.5.1) se A è limitato superiormente e $\sup(A) \notin A$, provare che $\sup(A)$ è un punto di accumulazione per A;

(6.5.2) $\overline{A}$ coincide con l'*aderenza* di A, cioè con l'insieme dei punti *aderenti* ad A, che sono gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $U \cap A \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x;

(6.5.3) se A è chiuso e limitato superiormente, allora $\sup(A) \in A$;

(6.5.4) $\overline{A}$ coincide con $\widetilde{A} := \left\{x \in \mathbb{R} \middle| d(x,A)=0\right\}$, dove

$$d(x,A) := \inf\left\{|x-a| \middle| a \in A\right\}.$$

Esercizio 6.6. Sia $\{a_n\}_{n\geqslant 1} \subset [0,+\infty)$ una successione infinitesima. Provare che esiste un'estratta $\{a_{n_k}\}$ per la quale

$$\sum_{k\geqslant 1} a_{n_k} < +\infty.$$

Esercizio 6.7. Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione tale che

$$\exists \ell \in \mathbb{R} : \forall \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \ \exists \left\{a_{n_{k_j}}\right\} \subset \{a_{n_k}\} \text{ t. c. } a_{n_{k_j}} \xrightarrow{j\to+\infty} \ell.$$

Provare che allora $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Esercizio 6.8. Calcolare (se esiste) il limite delle seguenti successioni ($\theta \in \mathbb{R}$):

(6.8.1) $a_n := \prod_{j=1}^n \sin(j\pi\theta)$, (6.8.2) $b_n := \sin(2\pi n! e)$.

Suggerimenti: per il punto (6.8.1), potrebbe essere utile ricordare che se θ è irrazionale, allora esiste una successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\{n_k\theta\} \to 0$ per $k \to \infty$, dove $\{x\} := x - [x]$ è al *parte frazionaria* di $x \in \mathbb{R}$ (cfr. pagina 70 di *Esercizi e complementi di Analisi Matematica, Volume Primo* di E. Giusti)...
Per il punto (6.8.2), ricordare che $e = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$. Spezzare quindi la serie in modo opportuno ed utilizzare la formula di addizione per il seno...