Tutorato di AM110 - Soluzioni

A.A. 2012-2013 — Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: Gianluca Lauteri, Mirko Moscatelli

Tutorato 5: Ripasso e introduzione alle serie numeriche.

Soluzione Esercizio 5.1.

(5.1.1) converge;

(5.1.2) diverge;

(5.1.3) converge (Stirling semplificato e criterio della radice);

(5.1.4) converge: per il criterio di condensazione di Cauchy $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\log(n)}}\sim\sum_{n\geqslant 1}\frac{2^n}{4^{n\log(n)}}$. Si conclude quindi per il criterio della radice;

(5.1.5) diverge: infatti, $\log(n!)\leqslant n\log(n)$ e quindi $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\log(n!)}\geqslant\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\log(n)}\sim\sum_{n\geqslant 2}\frac{2^n}{2^n n\log(2)}=\infty$ (criterio di condensazione di Cauchy);

(5.1.6) diverge;

(5.1.7) converge (criterio della radice);

(5.1.8) converge (criterio di condensazione di Cauchy. Quindi, criterio della radice);

(5.1.9) converge ($\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(\log(n))}{\log(n)}\right)=0$. Si può quindi utilizzare il confronto con una serie geometrica).

Soluzione Esercizio 5.2. Si verifica immediatamente che le successioni definenti le serie proposte sono infinitesime e decrescenti. Quindi, per il criterio di Leibniz, tutte e tre le serie sono convergenti. Per un controesempio nel caso in cui $\{a_n\}$ non sia decrescente, si consideri la successione

$$a_n:=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari,}\\ \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Soluzione Esercizio 5.4.

(5.4.1) 0;

(5.4.2) 1.

Soluzione Esercizio 5.5. Se $U:=(0,1)\cup(1,2)$, allora $\mathring{\overline{U}}=\widehat{[0,2]}^{\circ}=(0,2)\neq U$.

Soluzione Esercizio 5.6. È sufficiente notare che $\bigcap_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

Soluzione Esercizio 5.7.

(5.7.1) A è chiuso, $\mathscr{D}A=\varnothing$;

(5.7.2) B non è né aperto né chiuso e $\mathscr{D}A=[-1,0]\cup\{1\}$;

(5.7.3) $C=(-\infty,0)$ è aperto, $\mathscr{D}A=(-\infty,0]$.