Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AC310

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. Pierpaolo Esposito
Tutori: Dario Giannini e Giulia Salustri

TUTORATO 3 - SOLUZIONI
26 OTTOBRE 2012

1. Calcolare l'integrale su γ di $Re(z)dz$, dove gamma rappresenta:
(a) il segmento che unisce 0 a $(1+i)$;
(b) il segmento che unisce $(1+i)$ a 0;
(c) la circonferenza centrata in 0 e di raggio 1 con percorrenza antioraria.

SOLUZIONE:
(a) $\gamma(t) = t(1+i)$, con $t \in [0,1]$.
$\displaystyle\int_\gamma Re(z)dz = \int_0^1 Re(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = (1+i)\int_0^1 tdt = \frac{1+i}{2}$.
(b) $\gamma(t) = 1+i+t(-1-i)$, con $t \in [0,1]$
$\displaystyle\int_\gamma Re(z)dz = \int_0^1 (1+t)(-1-i)dt = -\frac{1+i}{2}$
(c) $C_1 = e^{it}$, con $t \in [0,2\pi]$.
$\displaystyle\int_{C_1} Re(z)dz = \int_0^{2\pi} cos(t)ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} cos^2(t) + isin(t)cos(t)dt = \pi i$.

2. Calcolare l'integrale su γ di $\dfrac{dz}{z^2-1}$, dove γ sta per la circonferenza di raggio 2 centrata nell'origine e di percorrenza oraria.

SOLUZIONE: Sfrutto il teorema dei residui:
$f(z) = \frac{dz}{z^2-1}$ ha due poli semplici all'interno della circonferenza di raggio 2 nei punti $z=1$, $z=-1$. Calcolo il residuo della funzione nelle due singolaritá:
$Res_{-1}(f) = -\frac{1}{2}$, mentre $Res_1(f) = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\displaystyle\int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i(Res_{-1}(f) + Res_1(f)) = 0$.

3. Calcolare sia con il metodo dei residui, sia con la formula di Cauchy:
(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$, dove $\gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$;
(b) $\displaystyle\int_{C_3^-} \frac{2(sin(z)+cos(z))}{z^2-4}dz$, dove C_3^- é la circonferenza di raggio 3 percorsa in senso orario;
(c) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1-cos^2(z)}{z^2}dz$.

SOLUZIONE:
(a)METODO DI CAUCHY
$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)(z+9)}$ possiede tre singolaritá polari semplici in $z = \pm 3i, z = -9$; tuttavia quest'ultima non appartiene al dominio delimitato da γ ed é

perció irrilevante ai fini dell'esercizio.
Voglio sfruttare la formula di Cauchy nella risoluzione; per farlo dovró spezzare il mio integrale in due integrali distinti in modo tale che ognuno dei due contenga solo una delle due singolaritá. In questo caso spezzo γ in γ_1 e γ_2 che sono rispettivamente la semicirconferenza sopra l'asse reale e quella al di sotto (entrambe con segmento su asse reale compreso). L'integrale su γ é uguale alla somma degli integrali su γ_1 e su γ_2. A questo punto sono soddisfatte le condizioni necessarie per applicare la formula di Cauchy e quindi si avrá che:
$\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-3i}dz = 2\pi i f_1(3i) = -2\pi i\frac{3i+1}{180}$, con $f_1(z) = \frac{1}{(z+9)(z+3i)}$.
$\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+3i}dz = 2\pi i f_1(-3i) = -2\pi i\frac{3i-1}{180}$, con $f_2(z) = \frac{1}{(z+9)(z-3i)}$.
$\displaystyle\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = -\frac{2\pi i}{90}$.
METODO DEI RESIDUI Come prima non considero la singolaritá $z = -9$ in quanto al di fuori del mio dominio. Calcolo i residui:
$Res_{3i}(f) = -\frac{3i+1}{180}$ e $Res_{-3i}(f) = \frac{3i-1}{180}$, quindi:
$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(Res_{-3i}(f) + Res3i(f)) = -\frac{2\pi i}{90}$.
Per i due prossimi esercizi utilizzeró solamente il metodo dei residui, con l'altro metodo si dovrá arrivare allo stesso risultato.
(b) La mia funzione presenta due singolaritá polari semplici in $z = 2$ e $z = -2$, entrambe nel dominio:
$Res_2(f) = \frac{sin(2)+cos(2)}{2}$ e $Res_{-2}(f) = \frac{sin(2)-cos(2)}{2} \Rightarrow \displaystyle\int_{C_3^-} \frac{2(sin(z)+cos(z))}{z^2-4}dz = 2\pi i sin(2)$.
(c) In questo caso ho una sola singolaritá in $z = 0$, tuttavia questa é eliminabile in quanto $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-cos^2(z)}{z^2} = \frac{1}{2}$, e quindi ha residuo nullo. L'integrale é perció anch'esso nullo.

4. Sia $f(z) = \frac{z+1}{z^5} ln(1+z^2)$.
(a) Calcolare la parte singolare $Q(z)$ di $f(z)$ in 0;
(b) Determinare lo sviluppo in serie di $f_r(z) := f(z) - Q(z)$ in 0 ed il suo raggio di convergenza;
(c) Calcolare il valore di:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_r(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta$$

espresso eventualmente come una serie numerica.

SOLUZIONE: Ricordiamo lo sviluppo di Taylor di $ln(1+z)$ in $B_1(0)$:
$\displaystyle ln(1+z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.
Allora abbiamo che $\displaystyle f(z) = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5}\right) \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{n+1}$.
(a) La parte singolare $Q(z)$ di $f(z)$ in 0 vale quindi $Q(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z}$.
(b) La funzione $f_r(z) := f(z) - Q(z)$ ha invece il seguente sviluppo di Taylor in 0:

$$f_r(z) = \frac{1}{z^5}\sum_{n\geq 2}(-1)^n\frac{z^{2n+2}}{n+1} + \frac{1}{z^4}\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{z^{2n+2}}{n+1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{n+3} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{n+2}$$

il cui raggio di convergenza vale 1.

(c) Infine abbiamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} |f_r(\rho e^{i\theta})|^2\, d\theta \;= 2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{\rho^{4n+3}}{(n+3)^2} + \sum_{n\geq 0}\frac{\rho^{4n+1}}{(n+2)^2}\right)d\rho$$

$$2\pi\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{4(n+1)(n+3)^2} + \frac{2}{(2n+1)(n+2)^2}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{64}\sum_{n\geq 0}\frac{5n+7}{(n+1)(2n+3)(n+3)^2}(\frac{1}{16})^n$$

5. Trovare le serie di Laurent di:
(a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ attorno a $0, 1$ e 2;
(b) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ attorno a 0.

SOLUZIONE: L'obiettivo é sfruttare estensivamente le proprietá della serie geometrica. **(a)** Riscriviamo la funzione come $f(z) = \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{2}{2-z}$

i. Caso $|z| < 1$:

$$f(z) = -\frac{1}{1-z}\frac{2}{2-z} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{k\geq 0} z^k + \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{2^k} = \sum_{k\geq 0} z^k\left(\frac{1}{2^k} - 1\right)$$

ii. Caso $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k\leq 0} z^k + \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{2^k}$$

iii. Caso $|z| > 2$:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} - \frac{2}{z(1-\frac{2}{z})} = \sum_{k<0} z^k - \sum_{k<0}\frac{z^k}{2^k} = \sum_{k<0} z^k(1-\frac{1}{2^k})$$

iv. Caso $|z-1| > 1$: poniamo $z - 1 = t$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t(1-\frac{1}{t})} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t}(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + \dots) =$$

$$= -\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t^3} - \dots = -\frac{1}{t} - 2\sum_{k<-1} t^k = -\frac{1}{z-1}\sum_{k<1}(z-1)^k$$

v. Caso $0 < |z-2| < 1$: poniamo $z - 2 = t$

$$f(t) = \frac{1}{1+t} - \frac{2}{t} = -\frac{2}{t} + (-1)^k t^k = -\frac{2}{z-2} + \sum_{k\geq 0}(-1)^k(z-2)^k$$

(b) $$f(z) = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2z} - \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{2^{k+2}}$$

nel caso in cui $0 < |z| < 2$.

Se invece $|z| > 2$ allora

$$f(z) = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{2z} + \frac{1}{2z(1-\frac{2}{z})} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots = \sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{z^{k+2}} = \sum_{k<0}\frac{z^{k-1}}{2^{k+1}}.$$

6. Calcolare i residui delle seguenti funzioni in tutti i punti di $\mathbb{C}$:
(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$;
(b) $\dfrac{z+4}{z^2-2z+1}$;

(c) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$;
(d) $cot(z)$;
(e) $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$;
(f) $\dfrac{e^{z^2}-zcos(z)}{z^5}$;
(g) $\dfrac{1}{sin(z)^2}$;
(h) $\dfrac{P(z)}{z^n}$, dove $P(z) \in \mathbb{C}[X]$.
(i) $sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

SOLUZIONE:
(a) La funzione presenta due singolaritá polari semplici in $z = -2$ e $z = -3$. Per calcolare il residuo in un polo semplice $z = z_0$ basta utilizzare la seguente formula:
Se $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \Rightarrow Res_{z_o}(f) = \frac{P(z_0)}{\dot{Q}(z_0)}$; quindi il residuo é 1 in $z = -2$ e -1 in $z = -3$.
(b) Se invece la singolaritá é di ordine superiore al primo come in questo caso, per calcolare il residuo si utilizza la formula generale:
Sia x una singolaritá polare di ordine n per $f(z) \Rightarrow$

$$Res_x(f(z)) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to x}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-x)^n f(z)$$

Nel nostro caso $f(z)$ presenta una singolaritá polare di ordine 2 in $z = 1 \Rightarrow Res_1(f) = lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z+4) = 1$ **(c)** La funzione presenta due poli di ordine 2 in $z = 1$ e in $z = -1$. I residui calcolati con la formula precedente sono rispettivamente $-\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{8}$.
(d) La funzione ha poli dove il seno ha zeri, e sono tutti poli di ordine 1; $\lim_{z\to k\pi}\frac{cos(z)}{cos(z)}) = 1$.
(e) In questo caso la funzione presenta una singolaritá di tipo polare semplice in $z = 1$ e una di tipo essenziale in $z = 0$. Sviluppando in serie di Laurent si ottiene che il residuo in $z = 0$ é $e - 1$, mentre in $z = 1$ é $-e$.
(f) Sviluppando in serie di potenze si ottiene che il residuo é $\frac{1}{2}$.
(g) La funzione possiede infiniti poli di ordine 2 in $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Applicando la formula si vede che $Res_{k\pi}(f(z)) = 0$.
(h) Il coefficiente del termine di grado $n - 1$ di $P(z)$. **(i)** la funzione presenta una singolaritá di tipo essenziale in $z = 0$. Per vedere quale sia il residuo occorre sviluppare in serie di Laurent. In questo caso si ottiene che $Res_0(f(z)) = 1$.