Appello X di AC310 - 4/9/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

1) Usando le relazioni $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ e $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, possiamo ri-scrivere l'integrale come

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta - 2\cos\theta + 3} = \int_{\partial^+ D(0,1)} \frac{2(1+2i)dz}{5z^2+6(i-2)z+3-4i}.$$

Poiché $5z^2+6(i-2)z+3-4i = 5(z+i-2)(z+\frac{i-2}{5})$, dal Teorema dei Residui otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta - 2\cos\theta + 3} = \pi.$$

2) Scegliamo la funzione $g(z) = 6z^n$ come confronto per la $f(z)$. Poiché

$$|f(z) - g(z)| = |z^2 + 3z| \leq 4 < 6 = |g(z)| \qquad \forall\, z \in \partial D(0,1),$$

dal Teorema di Rouché otteniamo che $f(z)$ ha n zeri (contati con molteplicitá) in $D(0,1)$. Poiché $f'(z) = 6nz^{n-1} + 2z + 3$, abbiamo che $f'(0) \neq 0$. Inoltre, se $z \neq 0$ soddisfa $f = f' = 0$, abbiamo che $nf = zf'$ implica $(n-2)z^2 + 3(n-1)z = 0$, ossia $z = -3\frac{n-1}{n-2}$. Poiché $|-3\frac{n-1}{n-2}| > 1$ per $n \geq 3$, otteniamo che gli zeri di f in $D(0,1)$ sono semplici, e sono quindi esattamente n.

1) Dato $0 < \epsilon < R$, sia $\Gamma_{\epsilon,R}$ la curva ottenuta unendo il segmento $[\epsilon, R]$, l'arco di circonferenza orientata positivamente di raggio R da R a $-R$, il segmento $[-R, -\epsilon]$ e l'arco di circonferenza orientata negativamente di raggio ϵ da $-\epsilon$ a ϵ. Nel semipiano superiore definiamo $\log z = \log|z| + i\theta$ per $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} \frac{\log z}{1+z^2} dz &= \int_\epsilon^R \frac{\log x}{1+x^2} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\log(-x) + \pi i}{1+x^2} dx + O(\frac{\log R}{R}) + O(\epsilon \log \epsilon) \\
&\to 2\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}
\end{aligned}$$

per $\epsilon \to 0$ e $R \to +\infty$. Poiché la funzione $f(z) := \frac{\log z}{1+z^2}$ ha un polo in i con Res $(f; i) = \frac{\pi}{4}$, dal Teorema dei residui otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = i\frac{\pi^2}{4} - i\frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 0.$$