# Appello B di AC310 - 6/2/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

**1)** Usando la relazione $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ possiamo ri-scrivere l'integrale come:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = i\int_C \frac{4zdz}{z^4-2(2a+1)z^2+1},$$

ove $C$ rappresenta l'arco di circonferenza unitaria percorsa in verso antiorario da $-i$ a $i$. Poiché

$$\int_{[-i,i]} \frac{4zdz}{z^4-2(2a+1)z^2+1} = -\int_{-1}^{1} \frac{4y}{y^4+2(2a+1)y^2+1}dy = 0$$

per simmetria, dal Teorema dei Residui otteniamo che

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = i\int_{C\cup[i,-i]} \frac{4zdz}{z^4-2(2a+1)z^2+1} = -8\pi \text{Res}\,(\frac{z}{(z^2-P^2)(z^2-Q^2)};Q) = \frac{\pi}{\sqrt{a(a+1)}},$$

ove $P = \sqrt{1+2a+2\sqrt{a(a+1)}}$, $-P$, $Q = \sqrt{1+2a-2\sqrt{a(a+1)}}$ e $-Q$ sono le quattro radici di $z^4-2(2a+1)z^2+1$. Abbiamo usato il fatto che $\pm P$ e $-Q$ sono esterni alla curva $C\cup[i,-i]$.

**2)** In $D(0,1)$ scegliamo la funzione $g_1(z) = 4z^3$ come confronto per la $f(z)$. Poiché

$$|f(z)-g_1(z)| = |z^8-z^2+1| \le 3 < 4 = |g_1(z)| \qquad \forall\, z \in \partial D(0,1),$$

dal Teorema di Rouché otteniamo che $f(z)$ ha tre zeri (contati con molteplicitá) in $D(0,1)$ (notiamo anche che $f \neq 0$ su $\partial D(0,1)$). In $D(0,\sqrt{2})$ scegliamo $g_2(z) = z^8+4z^3 = z^3(z^5+4)$ come funzione di confronto. Poiché $g_2$ ha uno zero in 0 di ordine 3 e cinque zeri semplici nelle radici quinte di $-4$, dal Teorema di Rouché otteniamo che $f(z)$ ha otto zeri (contati con molteplicitá) in $D(0,\sqrt{2})$ come conseguenza di

$$|f(z)-g_2(z)| = |-z^2+1| \le 3 < 8(2-\sqrt{2}) \le |z|^8-4|z|^3 \le |z^8+4z^3| = |g_2(z)| \quad \forall z \in \partial D(0,\sqrt{2}).$$

Abbiamo cosí mostrato che $f(z)$ ha cinque zeri (contati con molteplicitá) in $D(0,\sqrt{2})\setminus\overline{D(0,1)}$.

**3)** a) La trasformazione lineare fratta $F(z)$ richiesta puó essere costruita imponendo che $F(3) = -1$, $F(-1) = \infty$ e $F(1) = -2$, ossia $F(z) = -\frac{4}{z+1}$.
b) La mappa $2z^6+1$ fornisce un'equivalenza conforme tra $D(0,1)\cap\{x+iy : 0 < y < \sqrt{3}x\}$ e $D(1,2)\setminus\{x : 1 \le x \le 3\}$. La mappa cercata puó quindi essere costruita della forma $F(2z^6+1)$, osservando che $F(\{x : 1 \le x \le 3\}) = \{x : -2 \le x \le -1\}$.