Appello A di AC310 - 9/1/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Da $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$ e $2i \sin t = e^{it} - e^{-it}$, otteniamo che

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\sin t)(2+\cos t)} = 4 \int_\gamma \frac{zdz}{(z^2+4iz-1)(z^2+4z+1)},$$

ove $\gamma = \partial^+ D(0,1)$. Siccome il denominatore della funzione integranda ha quattro zeri semplici $\pm\sqrt{3}-2$ e $i(\pm\sqrt{3}-2)$ di cui solo $\sqrt{3}-2$ e $i(\sqrt{3}-2)$ in $D(0,1)$, dal Teorema dei Residui abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\sin t)(2+\cos t)} &= 8\pi i \left[\frac{z}{(z+2i+i\sqrt{3})(z^2+4z+1)} \Big|_{z=i(\sqrt{3}-2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{(z+2+\sqrt{3})(z^2+4iz-1)} \Big|_{z=\sqrt{3}-2} \right], \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2+\sin t)(2+\cos t)} = \frac{8\pi}{7\sqrt{3}}.$$

2) Poiché $e^x = |e^z|$, abbiamo che f soddisfa

$$|\frac{e^z}{f(z)}| \leq 1 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

e qundi dal Teorema di Liouville $f(z)$ è un multiplo di e^z: $f(z) = \lambda e^z$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) Data $g(z) = -4z^n$, abbiamo che

$$|f(z) - g(z)| = |1+z^2| \leq 2 < 4 = |4z^n| = |g(z)| \qquad \forall\, z \in \partial D(0,1),$$

e quindi dal Teorema di Rouché otteniamo che f ha n zeri in $D(0,1)$ (contati con molteplicitá). E' facile mostrare che f e f' non si annullano mai entrambe nello stesso punto, e quindi f ha esattamente n zeri in $D(0,1)$.

Esercizio 2 Siano $P_+ = R$ e $P_- = Re^{\frac{2\pi i}{3}}$. Sia Γ_R la curva chiusa ottenuta dall'unione del segmento $[0, P_+]$, con l'arco di circonferenza γ da P_+ a P_- in senso antiorario e con il segmento $[P_-, 0]$.Usiamo il Teorema dei Residui con $f(z) = \frac{z^{\frac{1}{4}}}{1+z^3}$ su Γ_R, che ha un unico polo semplice interno in $z = e^{\frac{\pi i}{3}}$ con residuo

$$\text{Res}\,(f; e^{\frac{\pi i}{3}}) = \frac{e^{\frac{\pi i}{12}}}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} = -\frac{i}{3} e^{-\frac{\pi i}{12}}.$$

Pensiamo la funzione $z^{\frac{1}{4}}$ definita come $|z|^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\theta}{4}}$ se $z = |z|e^{i\theta}$. Abbiamo che

$$\int_{[0,P_+]} f(z)dz = \int_0^R \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^3}dx, \qquad \int_{[P_-,0]} f(z)dz = -e^{\frac{5\pi i}{6}} \int_0^R \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^3}dx$$

e

$$|\int_{\gamma_R} f(z)dz| \leq 2\pi R \frac{R^{\frac{1}{4}}}{R^3-1}.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$, dal Teorema dei Residui otteniamo che

$$(1 - e^{\frac{5\pi i}{6}}) \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^3}dx = \frac{2\pi}{3}e^{-\frac{\pi i}{12}},$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}}}{1+x^3}dx = \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{3}-1)\pi.$$