AC310 - ESERCITAZIONE IV

22 NOVEMBRE 2012

Esercizio svolto 1. Determinare il numero di zeri dei seguenti polinomi (contati con molteplicità) nei domini di fianco indicati.

(a) $P_1(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$, nel disco $\mathcal{D}_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$;
(b) $P_2(z) = z^4 - 6z + 3$, nell'anello $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 \leq |z| < 2\}$;
(c) $P_3(z) = z^4 + z^3 + 1$, nel quadrante $\mathcal{Q} = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathbb{R}\mathrm{e}z > 0 \text{ e } \mathbb{I}\mathrm{m}z > 0\}$.

Soluzione.

(a) Applichiamo il teorema di Rouché con $\gamma = \partial\mathcal{D}_1(0)$ prendendo $g(z) = 6z^3$. Osserviamo che:
- $|g(z)| = 6|z|^3 = 6$ su γ;
- $|P_1(z) - g(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| \leq |z|^7 + 2|z|^5 + |z| + 1 = 5$ su γ.

Quindi:

$$|P_1(z) - g(z)| < |g(z)| \qquad \text{su } \gamma = \mathcal{D}_1(0).$$

Per il teorema di Rouché, P_1 e g hanno lo stesso numero di zeri in $\mathcal{D}_1(0)$ (contati con molteplicità). In conclusione, P_1 ha 3 zeri in $\mathcal{D}_1(0)$.

(b) Osserviamo che $\mathcal{A} = \mathcal{D}_2(0) \setminus \mathcal{D}_1(0)$. Cominciamo con lo studiare quanti zeri possiede P_2 in $\mathcal{D}_1(0)$. Procedendo come sopra, prendiamo $\gamma = \partial\mathcal{D}_1(0)$ e $g(z) = -6z$. Si verifica immediatamente che su γ:

$$|P_2(z) - g(z)| = |z^4 + 3| \leq |z^4| + 3 = 4 < 6 = 6|z| = |g(z)|.$$

Quindi per teorema di Rouché, P_2 ha un solo zero in $\mathcal{D}_1(0)$.

Vediamo cosa si può dire sugli zeri in $\mathcal{D}_2(0)$. Prendiamo $\gamma = \partial\mathcal{D}_2(0)$ e $g(z) = z^4$. Si verifica facilmente che

$$|P_2(z) - g(z)| = | - 6z + 3| \leq 6|z| + 3 = 15 < 16 = |z|^4 = |g(z)|.$$

Per il teorema di Rouché, P_2 ha esattamente 4 zeri in $\mathcal{D}_2(0)$.

Concludendo, P_2 ha tre zeri in $\mathcal{A}$.

(c) Consideriamo la curva γ_R formata da:
- il segmento σ_R congiungente 0 ad R,
- l'arco C_R sulla circonferenza di centro 0 e raggio R congiungente i punti R ed iR,
- il segmento σ_R^i congiungente iR a 0.

Poiché P_3 possiede un numero finito di zeri, per R sufficientemente grande il numero di zeri di P_3 in $\mathcal{Q}$ sarà lo stesso del numero di zeri di P_3 nella regione racchiusa da γ_R.
Applichiamo il teorema di Rouché prendendo come funzione $g(z) = z^4 + 1$.
Verifichiamo che $|P_3(z) - g(z)| < |g(z)|$ per $z \in \gamma_R$.
Infatti:

i) Per $z \in \sigma_R$ (cioè $z = x \in [0, R]$):

$$|P_3(z) - g(z)| = |x^3| = x^3 < x^4 + 1 = |x^4 + 1| = |g(z)|$$

(infatti $x^3 < x^4 + 1$ è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$);

ii) in maniera simile, per $z \in \sigma_R^i$ (cioè $z = iy$ con $y \in [0, R]$):

$$|P_3(z) - g(z)| = | - iy^3| = y^3 < y^4 + 1 = |y^4 + 1| = |g(z)|;$$

iii) per $z \in C_R$:

$$|P_3(z) - g(z)| = |z|^3 = R^3 < R^4 - 1 = |z|^4 - 1 \leq |z^4 + 1| = |g(z)|$$

che è verificata per R sufficientemente grande (ad esempio $R \geq 2$).

Poiché $g(z)$ possiede un solo zero all'interno della regione delimitata da γ_R, usando il teorema di Rouché si può concludere che P_3 ha un solo zero in $\mathcal{Q}$.

Esercizio aggiuntivo 1. Determinare il numero di radici del polinomio

$$P(z) = 3z^9 + 8z^6 + z^5 + 2z^3 + 1$$

nell'anello aperto $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$.

Esercizio svolto 2. Dimostrare che se $a > e$, l'equazione $az^n = e^z$ ha n soluzioni nel disco unitario $\mathcal{D}_1(0)$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione $az^n = e^z$ coincidono con gli zeri della funzione $f(z) = az^n - e^z$. Applichiamo il teorema di Rouché con $\gamma = \partial\mathcal{D}_1(0)$ prendendo $g(z) = az^n$. Osserviamo che:

- $|g(z)| = a|z|^n = a$ su γ;
- $|f(z) - g(z)| = |e^z| = e^{\mathbb{R}\mathrm{e}z} \leq e$ su γ.

Quindi:

$$|f(z) - g(z)| \leq e < a = |g(z)| \qquad \text{su } \gamma = \mathcal{D}_1(0).$$

Per il teorema di Rouché, f e g hanno lo stesso numero di zeri in $\mathcal{D}_1(0)$ (contati con molteplicità). In conclusione, f ha n zeri in $\mathcal{D}_1(0)$.

Esercizio svolto 3. Sia $f(z) = z^5 - 3iz + 6$ e sia $\mathcal{D}_r(0)$ un disco che contiene tutte le radici di f. Calcolare:

$$\int_{\partial\mathcal{D}(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Soluzione. Sia $\gamma = \partial\mathcal{D}_r(0)$ e definiamo $\Gamma = f \circ \gamma$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_0(\Gamma) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d(f(z))}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)\, dz}{f(z)} = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.
\end{aligned}$$

In particolare (è stato dimostrato a lezione) $\mathrm{Ind}_0(\Gamma)$ coincide col numero di zeri di f all'interno della regione delimitata da γ. Quindi:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \,\mathrm{Ind}_0(\Gamma) = 10\pi i.$$

Esercizio svolto 4. Sia $\mathcal{Q}_N$ il quadrato di vertici $\pm(N+\frac{1}{2}) \pm i(N+\frac{1}{2})$, con $N \geq 1$.

1. Calcolare:
$$I_N := \int_{\mathcal{Q}_N} \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{1+z^2}\, dz.$$
2. Assumendo che $\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$ (chi vuole può dimostrarlo), calcolare il valore della seguente somma:
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Soluzione.

1. La funzione $f(z) = \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{1+z^2} = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \cdot \frac{1}{1+z^2}$ ha poli in $z_\pm = \pm i$ ed in $z_n = n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.
   - Calcoliamo il residuo di f in $z_\pm = \pm i$. Si tratta di poli semplici e si verifica che:
   $$\mathrm{Res_{\pm i}(f)} \quad = \quad \pm\frac{1}{2i}\frac{\cos(\pm\pi i)}{\sin(\pm\pi i)} = -\frac{1}{2}\mathrm{cotanh}\,\pi.$$
   - Calcoliamo ora il residuo di f in $z_n = n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Anche in questo caso si tratta di un polo semplice. Osserviamo innanzitutto che:
   $$\begin{aligned}\mathrm{Res_n(f)} \quad &= \quad \frac{\cos\pi n}{1+n^2} \cdot \mathrm{Res_n}\left(\frac{1}{\sin(\pi \mathrm{z})}\right) = \\ &= \quad \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cdot \mathrm{Res_n}\left(\frac{1}{\sin(\pi \mathrm{z})}\right).\end{aligned}$$
   In particolare
   $$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(\pi z)} \quad &= \quad \frac{1}{\sin(\pi(z-n)+n\pi)} = \frac{1}{\sin(\pi(z-n))\cos(\pi n)} = \\ &= \quad \frac{(-1)^n}{\sin(\pi(z-n))} = \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{1}{(z-n)} + O((z-n)),\end{aligned}$$
   quindi
   $$\mathrm{Res_n}\left(\frac{1}{\sin(\pi \mathrm{z})}\right) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\pi}$$
   e di conseguenza
   $$\mathrm{Res_n(f)} = \frac{1}{\pi(1+\mathrm{n}^2)}.$$

Applicando il teorema dei residui si ottiene:

$$\begin{aligned} I_N &:= \int_{\mathcal{Q}_N} \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{1+z^2}\,dz. = \\ &= 2\pi i \left(\mathrm{Res_i(f)} + \mathrm{Res_{-i}(f)} + \sum_{\mathrm{n=-N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{Res_n(f)} \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\operatorname{cotanh}\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} \right). \end{aligned}$$

2. Osserviamo innanzitutto che la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$. Poiché $\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$ (chi vuole può dimostrarlo come esercizio aggiuntivo), allora:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N\to+\infty} I_N = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathcal{Q}_N} \frac{\operatorname{cotan}(\pi z)}{1+z^2}\,dz = \\ &= \lim_{N\to+\infty} 2\pi i \left(-\operatorname{cotanh}\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\operatorname{cotanh}\pi + \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{1+n^2} \right) = \\ &= 2\pi i \left(-\operatorname{cotanh}\pi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \right). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \operatorname{cotanh}\pi.$$

Esercizio aggiuntivo 2. Sia Ω una regione semplicemente connessa di $\mathbb{C}$ e sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$. Dimostrare che esiste una determinazione analitica di $\log f(z)$ in Ω, cioè esiste $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che:

$$e^{g(z)} = f(z) \qquad \text{per ogni } z \in \Omega.$$