AM310-2012 : RECUPERO I ESONERO

TEMA 1 . Sia X un insieme.
1.1. Dare la definizione di misura esterna μ su X, la definizione di sottoinsieme μ misurabile di X e descrivere le principali proprietá della classe dei misurabili Σ_μ e della restrizione di μ a Σ_μ. Dimostrare infine che

(i) $E_j \in \Sigma_\mu,\ E_j \subset E_{j+1}\ \ \forall j \Rightarrow \mu(E_j) \to \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j)$

(ii) $E_j \in \Sigma_\mu,\ E_{j+1} \subset E_j \quad \forall j,\ \mu(E_1) < +\infty \ \Rightarrow\ \mu(E_j) \to \mu(\cap_{j=1}^{+\infty} E_j)$

1.2. Dare la definizione di misure di Lebesgue L^n e di Hausdorff $H^s, s \geq 0$ in $\mathbf{R}^n$ e mostrare che le misure di Hausdorff sono Boreliane regolari. Enunciare le proprietá salienti delle misure di Hausdorff e dimostrarne qualcuna.
Infine, provare o disprovare le seguenti affermazioni:

(k) Sia $\mu = L^n$ in 1.1 (i). Allora gli E_j si possono prendere anche non misurabili

(kk) Sia $\mu = L^n$ in 1.1 (ii). Allora gli E_j si possono prendere anche non misurabili

1.3. Dato $P \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, sia $\mu(P) :=$
$\inf\{\sum_j L^n(A_j)L^m(B_j) :\ P \subset \cup_j (A_j \times B_j), A_j \subset \mathbf{R}^n, B_j \subset \mathbf{R}^m$ Lebesgue misurabili$\}$

Provare che μ é una misura esterna su $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ e che se $A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}^m$ sono Lebesgue misurabili allora $A \times B$ é μ-misurabile.

TEMA 2. Sia Σ una σ algebra di sottoinsiemi di X.
2.1. Dare la definizione di funzione Σ-misurabile ed indicare le proprietá della classe delle funzioni Σ-misurabili. Provare la formula per $f \geq 0$, funzione Σ-misurabile:

$$\exists E_j \in \Sigma : \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) \qquad \forall x \in X$$

2.2. Sia μ misura su X, Σ_μ la classe dei misurabili. Dare la definizione di funzione μ-sommabile e mostrare che, se $f \geq 0$ é μ-sommabile, allora

$$\mu_f(E) := \int_X f \chi_E d\mu, \qquad E \in \Sigma_\mu$$

é misura su X, assolutamente continua rispetto a μ.

2.3. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ s : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,\ s(x,y) = x - y$. Provare, o disprovare, le affermazioni:
(l) Se f é borel misurabile allora $f \circ s$ é borel misurabile in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$
(ll) Se f é Lebesgue misurabile allora $f \circ s$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

TEMA 3. Sia μ misura su X, $\mathcal{L}^p = \{f : f$ é μ-misurabile e $\int_X |f|^p d\mu < \infty\}$.
3.1. Siano $1 < p, q$. Siano f, g μ-misurabili, $\|f\|_p := (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. Provare che
(a) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_X |f\, g| \ \leq \ \|f\|_p \, \|g\|_q$
(b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
(c) $p \leq r \leq q$, $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{L}^r$ ed $\exists \theta \in [0,1] : \quad \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$

3.2 Sia f $\mu-$misurabile e $\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \ |f(x)| \leq c \ \text{ q.o. } \ x\}$. Provare che
(d) $\sup_{p \geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \|f\|_\infty < \infty$
(e) $\|f\|_p < \infty$ per $p \in \{1, \infty\} \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p < \infty \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to_{p \to \infty} \|f\|_\infty$

3.3.Siano $f_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ boreliane e tali che $\sup_n \int_{\mathbf{R}^n} |f_n|^p < \infty$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \ \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_n|^2 \to \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f|^2 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f_n - f|^2 \to 0$$

TEMA 4. Sia μ misura su X.
4.1. Enunciare la diseguaglianza di Hanner e dedurre che, se $p > 1$, $C \subset L^p$ chiuso e convesso, allora $\quad \forall h \in L^p, \quad \exists h_C \in C : \quad \|h - h_C\|_p \leq \|h - g\|_p \quad \forall g \in C$.

4.2. Mostrare come 4.1. permette di dimostrare che (assumendo L^p separabile) ogni successione limitata in L^p ammetta una sottosuccessione debolmente convergente.

4.3. Sia $p \geq 2$. Provare che :

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1, \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\|_p \to_n 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - g_n\|_p \to_n 0$$

e dedurre che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

TEMA 5.
5.1. Sia $E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile e di misura finita. Provare, o disprovare, che

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi_\epsilon \in C_0(\mathbf{R}^N) : \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi_\epsilon - \chi_E| \ \leq \ \epsilon.$$

5.2. Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Provare, o disprovare, che

$$\exists \quad f_j \in C_0 \text{ tali che } \int_{\mathbf{R}^N} |f - f_j| \ \to_j \ 0.$$

5.3. Provare, o disprovare, che

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f| \ < \ \infty \ \Rightarrow \ \int_{\mathbf{R}^N} |f(x+h) - f(x)| \, dx \to_{|h| \to 0} \ 0.$$