Seminario AM310: $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Elena Piobbici Roberta Tirocchi

Introduzione

L'obiettivo di questo seminario è fornire una trattazione delle misure di Hausdorff. Sarà subito introdotta la definizione di misura s-dimensionale di Hausdorff di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, indicata con $\mathcal{H}^s(A) \doteq \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$, dove $s \in [0, \infty), \delta \in (0, \infty)$ e

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^s : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ |C_i| \leq \delta \right\},$$

avendo denotato con $|C_i|$ il diametro di un generico insieme non vuoto C_i e con $\alpha(s)$ la funzione $\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ che per s intero restituisce la misura di una palla unitaria s-dimensionale. Si può subito osservare che, facendo tendere δ a zero, i ricoprimenti di A diventano sempre più aderenti all'insieme ed aumenta la precisione con cui viene stimata la misura di A. Vengono dunque richiamate, brevemente, le nozioni della Teoria della Misura inerenti allo studio delle misure introdotte nel 1918 dal matematico tedesco Felix Hausdorff; successivamente l'attenzione si concentrerà sulle proprietà elementari, di cui esse godono, e si passa poi a definire la dimensione di Hausdorff, attraverso un esempio significativo: l'Insieme di Cantor, di cui viene dimostrato che la dimensione è $\ln 2 / \ln 3$. Si passer 'a al confronto tra le nuove misure introdotte e quelle classiche di Lebesgue. In particolare, usando la procedura di regolarizzazione nota come simmetrizzazione di Steiner, e passando per la disuguaglianza isodiametrica, sarà fatto vedere che la misura n-dimensionale di Hausdorff coincide con la misura n-dimensionale di Lebesgue in ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Capitolo 1

La misura di Hausdorff

1.1 Definizioni e prime proprietà

Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è non vuoto, il *diametro* di C è il $\sup\{|x-y| : x, y \in C\}$ ed è denotato con $|C|$. Inoltre la funzione gamma di Eulero è indicata per consuetudine con $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$, $t \in (0, \infty)$.

Definizione. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ e $0 < \delta < \infty$. Detto*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \doteq \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^s : A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i, \ |C_i| \leq \delta \right\}$$

con

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

ed essendo i C_i sono sottoinsiemi generici non vuoti di $\mathbb{R}^n$, si definisce

$$\mathcal{H}^s(A) \doteq \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

che è chiamata ***misura s-dimensionale di Hausdorff*** *su $\mathbb{R}^n$ di A.*

La condizione $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i$, $|C_i| \leq \delta$ può essere più semplicemente espressa dicendo che $\{C_i\}$ è un δ-*ricoprimento* di A. Inoltre poiché $|C_i| = |\overline{C_i}|$ si possono considerare soltanto i δ-ricoprimenti costituiti da insiemi chiusi.

Osservazione. Il limite nella definizione esiste sempre poiché al diminuire di δ viene ridotta la classe dei possibili δ-ricoprimenti di A, quindi aumenta il valore dell'estremo inferiore e dunque il limite è equivalente al $\sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$.

La richiesta $\delta \to 0$ obbliga i δ-ricoprimenti a seguire la geometria locale dell'insieme A migliorando la stima della sua misura. Invece la costante di normalizzazione $\alpha(s)$ è presente per far coincidere la misura n-dimensionale di Hausdorff con la misura di n-dimensionale di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.
Prima di passare alla visione delle proprietà possono essere utili alcuni richiami. Dato un insieme X, un' applicazione $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ è chiamata *misura* se:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Tale applicazione si chiama misura esterna.Definiamo gli insiemi *μ-misurabili*, ovvero tali che $\forall B \subseteq X$ risulta $\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap \mathcal{C}A)$.
La famiglia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ degli insiemi μ-misurabili forma una *σ-algebra*:

(i) $\emptyset$, X $\in \mathcal{A}$;

(ii) A $\in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{A}$;

(iii) $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Se X è uno spazio metrico con la distanza d, la più piccola σ-algebra generata dai chiusi di X viene detta *σ-algebra di Borel* ed i suoi elementi si chiamano insiemi di Borel. Nel caso in cui tutti gli insiemi di Borel risultano μ-misurabili, μ è una *misura di Borel*; infine si parla di *misura di Borel regolare* se, oltre ad essere di Borel, $\forall A \subseteq X \ \exists B \supseteq A$ di Borel tale che $\mu(A) = \mu(B)$.

Teorema 1.1.1. *$\mathcal{H}^s$ è una misura di Borel regolare.*

Dimostrazione del Teorema 1. Per comodità è suddivisa un più passi.

1) *$\mathcal{H}^s_\delta$ è una misura.*
$\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0 \ \forall \delta > 0$. Rimane da verificare la subadditività numerabile. Si consideri quindi $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_i) = \infty$ la subadditività è verificata, si supponga quindi che tale serie è convergente. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, per ogni i esiste $\{C_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ δ-ricoprimento di A_i tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{|C_j^{(i)}|}{2} \right)^s < \mathcal{H}^s_\delta(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

da cui segue

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{|C_j^{(i)}|}{2}\right)^s < \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(A_i)+\varepsilon.$$

Dato che $\{C_j^{(i)}\}_{i,j=1}^{\infty}$ è un δ-ricoprimento di $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, per definizione di $\mathcal{H}_\delta^s$, vale la disuguaglianza

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{|C_j^{(i)}|}{2}\right)^s$$

e facendo tendere ε a zero si arriva alla subadditività

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(A_i).$$

2) $\mathcal{H}^s$ *è una misura.*
Sia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$, allora

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(A_i)$$

e si fa tendere δ a zero.

3) $\mathcal{H}^s$ *è una misura di Borel.*
Definiamo la misura metrica: sia μ una misura su $\mathbb{R}^n$, allora $\mu(A\cup B) = \mu(A)+\mu(B)$ $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathrm{dist}(A,B) > 0$.

Teorema 1.1.2. *μ è una misura metrica implica che μ è una misura di Borel.*

Si prendano $0 < \delta < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(A,B)$ ed un δ-ricoprimento $\{C_i\}$ di $A \cup B$, siano $\mathcal{A} = \{C_i : C_i \cap A \neq \emptyset\}$ e $\mathcal{B} = \{C_i : C_i \cap B \neq \emptyset\}$; allora $A \subseteq \bigcup_{C_i\in\mathcal{A}} C_i$, $B \subseteq \bigcup_{C_i\in\mathcal{B}} C_i$ e $C_a \cap C_b = \emptyset$ se $C_a \in \mathcal{A}$, $C_b \in \mathcal{B}$ poiché A e B sono disgiunti e δ è abbastanza piccolo. Dalle disuguaglianze

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(s)\left(\frac{|C_i|}{2}\right)^s &\geq \sum_{C_i\in\mathcal{A}}\alpha(s)\left(\frac{|C_i|}{2}\right)^s + \sum_{C_i\in\mathcal{B}}\alpha(s)\left(\frac{|C_i|}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}_\delta^s(A)+\mathcal{H}_\delta^s(B)\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di $\{C_i\}$ si trova che $\mathcal{H}_\delta^s(A\cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A)+\mathcal{H}_\delta^s(B)$. Facendo tendere δ a 0, si ottiene $\mathcal{H}^s(A\cup B) \geq \mathcal{H}^s(A)+\mathcal{H}^s(B)$, mentre la disuguaglianza inversa è sempre valida per qualsiasi scelta di A e B .

4) *$\mathcal{H}^s$ è una misura di Borel regolare.*
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è tale che $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ allora $B = \mathbb{R}^n$. Sia $\mathcal{H}^s(A) < \infty$; quindi $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty\ \forall \delta > 0$. Per ogni $k \geq 1$ sia $\{C_i^{(k)}\}_{i=1}^\infty$ $\frac{1}{k}$-ricoprimento di A costituito da insiemi chiusi, quindi di Borel, e tale che

$$\sum_{i=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{|C_i^{(k)}|}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Allora detti $A_k = \bigcup_{i=1}^\infty C_i^{(k)}$ e $B = \bigcap_{k=1}^\infty A_k$ si ha che B è di Borel essendo intersezione di unione di insiemi di Borel; poiché $A \subseteq A_k\ \forall k$ si ha anche $A \subseteq B$. Inoltre per $k \to \infty$ da

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A_k) \leq \sum_{i=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{|C_i^{(k)}|}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}$$

si ottiene $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$ e per monotonia della misura si ha la tesi.

□

Teorema 1.1.3. Proprietà elementari della misura di Hausdorff

(i) *$\mathcal{H}^0$ è la misura che conta, ovvero $\mathcal{H}^0(A) = card(A)\ \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$;*

(ii) *$\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$;*

(iii) *$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) \equiv 0$, $\forall s > n$;*

(iv) *$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$, $\forall \lambda > 0$ dove $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$;*

(v) *$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A + x)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione.

1) Prima di tutto $\alpha(0) = 1$; poi se $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, ogni δ-ricoprimento è costituito da n insiemi disgiunti per δ sufficientemente piccolo e quindi $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.

2) Si verifica immediatamente che $\alpha(1) = 2$. Allora $\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$ segue dal fatto che $\forall \delta > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(A) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |C_i| : A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i,\ \{C_i\} \text{ intervalli aperti} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |C_i| : \{C_i\}\ \delta\text{-ricoprimento di } A \right\} = \mathcal{H}^1_\delta(A). \end{aligned}$$

Per l'altro senso, si considerino gli intervalli $I_k = [k\delta, (k+1)\delta]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, in modo che, se $\{C_i\}$ è un ricoprimento di A fatto di intervalli aperti, risulta $|C_i \cap I_k| \leq \delta$ e $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |C_i \cap I_k| = |C_i|$. In pratica il ricoprimento è stato suddiviso in parti con diametro minore od uguale a δ e dunque $\{C_i \cap I_k\}_{i,k}$ è un δ-ricoprimento di A. Vale quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |C_i| : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ \{C_i\} \text{ intervalli aperti}\right\} \\
&= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |C_i \cap I_k| : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ \{C_i\} \text{ intervalli aperti}\right\} \\
&\geq \mathcal{H}^1_\delta(A).
\end{aligned}$$

3) Fissato un intero positivo m, un n-cubo unitario $\mathcal{Q}$ può essere decomposto in m^n n-cubi aventi diagonale $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Perciò

$$\mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \alpha(s)\left(\frac{\sqrt{n}}{2m}\right)^s = \alpha(s)\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^s m^{n-s}$$

e se $s > n$, passando al limite per $m \to \infty$, si ottiene $\mathcal{H}^s(\mathcal{Q}) = 0$. Quindi $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, essendo $\mathbb{R}^n$ unione di un'infinità numerabile di cubi unitari.

4) Se $\{C_i\}$ è un δ-ricoprimento di A, $\{\lambda C_i\}$ è un $\lambda\delta$-ricoprimento di λA e

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{|\lambda C_i|}{2}\right)^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{|C_i|}{2}\right)^s.$$

La disuguaglianza vale per ogni δ-ricoprimento di A, di conseguenza $\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A)$ e per $\delta \to 0$ si trova $\mathcal{H}^s(\lambda A) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Il verso opposto si ottiene osservando che $A = \frac{1}{\lambda}(\lambda A)$.

5) Più in generale, è vero che le misure di Hausdorff sono invarianti per isometrie.

□

Teorema 1.1.4. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ per qualche $0 < \delta < \infty$. Allora $\mathcal{H}^s(A) = 0$.*

Dimostrazione. Se $s = 0$ necessariamente $A = \emptyset$; sia dunque $s > 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, per le ipotesi fatte, deve esistere un ricoprimento $\{C_i\}$ di A tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^s \leq \varepsilon.$$

In particolare $|C_i| \leq 2(\frac{\varepsilon}{\alpha(s)})^{1/s}$ per ogni i, quindi, ponendo $\delta(\varepsilon) = 2(\frac{\varepsilon}{\alpha(s)})^{1/s}$, si ha $\mathcal{H}^s_{\delta(\varepsilon)}(A) \leq \varepsilon$. Per $\varepsilon \to 0$ anche $\delta(\varepsilon) \to 0$ e così $\mathcal{H}^s(A) = 0$. □

Per definire la dimensione di Hausdorff di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, bisogna soffermarsi sul seguente risultato.

Teorema 1.1.5. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < t < \infty$, allora:*

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$;

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Dimostrazione.

1) Sia $\{C_i\}$ un δ-ricoprimento di A; osserviamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1$$

naturalmente

$$\mathcal{H}^t_\delta(C_i) \leq \alpha(t) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^t \leq \alpha(s) \left(\frac{|C_i|}{2} \right)^s \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s}.$$

Dunque per la monotonia e la subadditività numerabile di una misura e per l'arbitrarietà del δ-ricoprimento $\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq (\mathcal{H}^s_\delta(A) + 1)\frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}(\frac{\delta}{2})^{t-s}$. Passando al limite di $\delta \to 0$ si ottiene la tesi ricordando che $\mathcal{H}^s(A) < \infty$.

2) È la contronominale del primo punto.

□

Definizione. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si definisce* ***dimensione di Hausdorff***

$$\mathcal{H}_{dim}(A) \doteq \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

1.2 Esempio

Esempio 1. Insieme di Cantor
L'Insieme di Cantor si costruisce a partire dall'intervallo unitario $E_0 = [0, 1]$ eliminando ricorsivamente dei suoi sottoinsiemi. Dopo aver diviso E_0 in tre parti uguali, si prende l'insieme $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ottunuto togliendo il segmento centrale da E_0. Successivamente, eliminando anche ad ogni intervallo di E_1 il segmente centrale, si ottiene $E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Si continua in questo modo arrivando in generale ad E_k che consiste in 2^k intervalli ognuno di lunghezza 3^{-k}. Infine si prende l'interzione di tali insiemi, $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, a cui si dà il nome di Insieme di Cantor, che può anche essere visto come il limite della sequenza degli insiemi E_k.

F, pur avendo cardinalità non numerabile, ha $\mathcal{L}^1$-misura zero e, per la proprietà (ii) del Teorema 1.1.3, $\mathcal{L}^1(F) = \mathcal{H}^1(F) = 0$. Per verificare quanto appena detto, bisogna osservare, innanzitutto, che $\mathcal{L}^1(E_k) = (2/3)^k$ poiché E_k è unione di 2^k intervalli disgiunti ognuno di ampiezza 3^{-k} e quindi, essendo $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ una successione decrescente di insiemi compatti, ne segue che F è un insieme compatto di misura nulla: $\mathcal{L}^1(F) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^1(E_k) = \lim_{k\to\infty}(2/3)^k = 0$. Rimane da controllare la cardinalità di F. Ogni numero reale $x \in [0, 1]$ si può scrivere nella forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ con $a_k \in \{0, 1, 2\}$ $\forall k \geq 1$. Conveniendo di scegliere i coefficienti in modo che la successione $\{a_k\}$ contenga il minor numero possibile di 1, tale rappresentazione è unica. In questo modo, si vede che

$$E_1 = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_1 \neq 1\}.$$

Analogamente,

$$E_2 = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_1, a_2 \neq 1\}$$

e, induttivamente,

$$E_n = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_1, \dots, a_n \neq 1\}.$$

Da cui

$$F = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_k \neq 1 \ \forall k \geq 1\}.$$

Si consideri l'applicazione $T : F \to [0,1]$ definita da

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{a_k}{2}}{2^k}, \quad \text{se } x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}.$$

Questa applicazione è suriettiva perché ogni numero reale $x \in [0,1]$ ha rappresentazione "binaria" della forma $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/2^k$ con $b_k \in \{0,1\}$ ed è quindi chiaro che raddoppiando ogni coefficiente si ottiene uno sviluppo ternario che individua un elemento di F che quindi ha la cardinalità di $[0,1]$.
A questo punto è legittimo chiedersi quale sia la dimensione di Hausdorff di tale oggetto; senza avere intenzione di essere rigorosi, per il momento, si può cominciare notando che F si può dividere in due insiemi disgiunti $F_L = F \cap [0,1/3]$ e $F_R = F \cap [2/3,1]$ che sono simili ad F ma scalati di $1/3$. Quindi per ogni s, utilizzando la proprietà (iv) del Teorema 1.1.3, si ha

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_L) + \mathcal{H}^s(F_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Supponendo, senza verificarlo, che $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ e dividendo per $\mathcal{H}^s(F)$ si ottiene $1 = 2(1/3)^s$, ovvero $s = \ln 2/\ln 3$.

Capitolo 2

Disuguaglianza isodiametrica e $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Dato che verrà studiato il legame tra le misure di Hausdorff e le misure di Lebesgue, si ricorda brevemente la definizione di quest'ultime.

Definizione. *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Se I è limitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita come la differenza dei suoi estremi; se invece I è illimitato, la sua lunghezza $l(I)$ è definita $+\infty$. Sia adesso $R = I_1 \times \ldots I_n$ un rettangolo in $\mathbb{R}^n$. La sua misura è definita come $Vol(R) = l(I_1) \cdot \ldots l(I_n)$. L'applicazione $\mathcal{L}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ con*

$$\mathcal{L}^n(A) \doteq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} Vol(R_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i,\ \{R_i\} \text{ rettangoli} \right\}$$

*è la **misura n-dimensionale di Lebesgue**.*

Prima di passare ai teoremi principali di questa sezione, è necessario prendere confidenza con la procedura nota come *simmetrizzazione di Steiner*, utile per rendere "più regolare" un insieme conservando la sua misura.
Il risultato che segue serve per dimostrarne una proprietà importante.

Teorema 2.0.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ una funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora la regione sotto il grafico di f,*

$$A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile.

Dimostrazione. La funzione $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x) - y$ è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile. Per verificarlo siano $\overline{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $\overline{f}(x, y) = f(x)$ ed $\overline{y} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $\overline{y}(x, y) = y$. La loro $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabilità deriva dalla $\mathcal{L}^n$-misurabilità di f ed y; in questo modo $g = \overline{f} - \overline{y}$ è somma di funzioni misurabili. Allora anche l'insieme $\{(x, y) : g(x, y) \geq 0\}$ è $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabile e di conseguenza A è intersezione di due insiemi $\mathcal{L}^{n+1}$-misurabili

$$A = \{(x, y) : g(x, y) \geq 0\} \cap \{(x, y) : y \geq 0\}.$$

□

Definizione. *Fissati $a, b \in \mathbb{R}^n$ con $|a| = 1$ si denotano*

$$\begin{aligned} L_b^a &= \{b + ta : t \in \mathbb{R}\} \text{ la retta passante per } b \text{ nella direzione } a, \text{ e} \\ P_a &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 0\} \text{ l'iperpiano passante per l'origine normale ad } a. \end{aligned}$$

Sia inoltre $A \subseteq \mathbb{R}^n$; allora si definisce ***simmetrizzazione di Steiner*** *di A rispetto al piano P_a l'insieme*

$$S_a(A) \doteq \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \left\{ b + ta : |t| \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \right\}.$$

Teorema 2.0.2. Proprietà della simmetrizzazione di Steiner

(i) $|S_a(A)| \leq |A|$;

(ii) Se A è $\mathcal{L}^n$-misurabile, allora lo è anche $S_a(A)$ e $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.

Dimostrazione.

1) Se $|A| = \infty$ è immediato, sia dunque $|A| < \infty$. È possibile anche supporre A chiuso dato che $|A| = |\overline{A}|$. Fissato $\varepsilon > 0$, si prendono $x, y \in S_a(A)$ tali che $|S_a(A)| \leq |x - y| + \varepsilon$; chiamate $b = x - (x \cdot a)a$, $c = y - (y \cdot a)a$ le proiezioni di x, y su P_a, si possono denominare

$$r = \inf\{t : b + ta \in A\}, \; s = \sup\{t : b + ta \in A\},$$

$$u = \inf\{t : c + ta \in A\}, \; v = \sup\{t : c + ta \in A\}$$

che sono finiti perché essendo A limitato lo è anche la sua intersezione con L_b^a e L_c^a di cui r, s, u, v ne rappresentano gli estremi. Senza perdita di generalità sia $v-r \geq s-u$ (il ragionamento è analogo se $s-u \geq v-r$). Allora valgono le disuguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} v-r &\geq \frac{1}{2}(v-r)+\frac{1}{2}(s-u) \\ &= \frac{1}{2}(s-r)+\frac{1}{2}(v-u) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)+\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_c^a). \end{aligned}$$

Ora, $x, y \in S_a(A)$ implica $\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a) \geq |x\cdot a|$, $\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A\cap L_c^a) \geq |y\cdot a|$ e di conseguenza dalla relazione precedente si ricava

$$v-r \geq |x\cdot a| + |y\cdot a| \geq |x\cdot a - y\cdot a|.$$

A questo punto, applicando il teorema di Pitagora e utilizzando il fatto che A è chiuso e quindi $b+ra$, $c+va \in A$, si deduce

$$\begin{aligned} (|S_a(A)|-\varepsilon)^2 &\leq |x-y|^2 \\ &= |b-c|^2 + |x\cdot a - y\cdot a|^2 \\ &\leq |b-c|^2 + |v-r|^2 \\ &= |(b+ra)-(c+va)|^2 \\ &\leq |A|^2. \end{aligned}$$

E si conclude da $|S_a(A)|-\varepsilon \leq |A|$.

2) Siccome $\mathcal{L}^n$ è invariante per rotazioni e ne esiste una che trasforma a in $e_n = (0,\ldots,0,1)$ si può assumere direttamente $a = e_n$, in tal modo $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. Dato che A è misurabile, la sua funzione caratteristica $\mathcal{X}_A(b,x), (b,x) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ oltre ad essere non negativa è anche misurabile; si può quindi applicare il Teorema di Fubini-Tonelli e ricavare che $b \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_A(b,x)\,dx = \mathcal{L}^1(A\cap L_b^a)$ è $\mathcal{L}^{n-1}$-misurabile e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{X}_A(b,x)\,db\,dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_A(b,x)\,dx\right) db \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(A\cap L_b^a)\,db. \end{aligned}$$

Per la proprietà (ii) del Teorema 1.1.2 si ha $\mathcal{L}^1(A\cap L_b^a) = \mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)$ che, al variare di $b\in\mathbb{R}^{n-1}$, è una funzione che soddisfa le ipotesi del Teorema 1.3.1 e pertanto $S_a(A)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile potendosi scrivere come

$$\left\{(b,t) : \frac{-\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)}{2} \leq t \leq \frac{\mathcal{H}^1(A\cap L_b^a)}{2}\right\} \setminus \{(b,0) : L_b^a \cap A = \emptyset\}.$$

A questo punto si riapplica il Teorema di Fubini-Tonelli alla funzione caratteristica dell' insieme $S_a(A)$, analogamente a quanto fatto su A, e si trova $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a)\, db = \mathcal{L}^n(A)$.

□

Raccolti tutti gli strumenti necessari, si può dimostrare che, fissato il diametro, l'insieme di misura maggiore è la palla n-dimensionale.

Teorema 2.0.3. Disuguaglianza isodiametrica

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{|A|}{2} \right)^n .$$

Dimostrazione. Se $|A| = \infty$ la tesi è verificata; sia quindi $|A| < \infty$ ed $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Detti $A_1 = S_{e_1}(A), \ldots, A_n = S_{e_n}(A_{n-1})$, la dimostrazione viene spezzata in tre passi.

1) A_n è simmetrico rispetto all'origine.
Si procede per induzione; per costruzione A_1 è simmetrico rispetto a P_{e_1}, sia quindi $1 \leq k < n$ e si supponga A_k simmetrico rispetto a $P_{e_1}, \ldots, P_{e_k}$ con l'intenzione di dimostrare che lo è A_{k+1} rispetto a $P_{e_1}, \ldots, P_{e_{k+1}}$. Fatto questo basta osservare che A_n risulta simmetrico rispetto a $P_{e_1}, \ldots, P_{e_n}$ e quindi anche rispetto all'origine.
Sempre per costruzione, $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ è simmetrico rispetto a $P_{e_{k+1}}$. Si prenda poi $1 \leq j \leq k$ ed $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la riflessione rispetto a P_{e_j}. Se $b \in P_{e_{k+1}}$, poiché per ipotesi induttiva $f_j(A_k) = A_k$ ed essendo la misura di Hausdorff invariante per isometrie, si ha

$$\frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(f_j(A_k \cap L_b^{e_{k+1}})) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A_k \cap L_{f_j(b)}^{e_{k+1}})$$

e di conseguenza $\{t : b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t : f_j(b) + te_{k+1} \in A_{k+1}\}$ per definizione di $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$. In altre parole $f_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$, equivalente a dire che A_{k+1} è simmetrico rispetto a P_j.

2) $\mathcal{L}^n(A_n) \leq \alpha(n) \left(\frac{|A_n|}{2} \right)^n$.
Qualunque sia $x \in A_n$, per il passo precedente anche $-x \in A_n$; ne segue che $2|x| \leq |A_n|$, ovvero $|x| \leq \frac{|A_n|}{2}$ e quindi $A_n \subseteq B_{\frac{|A_n|}{2}}(0)$. Ricordando la formula che lega la funzione gamma con la misura delle palle in $\mathbb{R}^n$, per monotonia della misura di Lebesgue si ha

$$\mathcal{L}^n(A_n) \leq \mathcal{L}^n(B_{\frac{|A_n|}{2}}(0)) = \alpha(n) \left(\frac{|A_n|}{2} \right)^n .$$

3) $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\left(\frac{|A|}{2}\right)^n$.
Dato che gli insiemi chiusi sono $\mathcal{L}^n$-misurabili, lo è anche $\overline{A}$. Adesso è possibile applicare ripetutamente entrambe le proprietà della simmetrizzazione di Steiner, ottenendo $|(\overline{A})_n| \leq |\overline{A}|$ e $\mathcal{L}^n((\overline{A})_n) = \mathcal{L}^n(\overline{A})$. Infine, ricordando quanto visto nel passo antecedente, si conclude

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) = \mathcal{L}^n((\overline{A})_n) \\ &\leq \alpha(n)\left(\frac{|(\overline{A})_n|}{2}\right)^n \\ &\leq \alpha(n)\left(\frac{|\overline{A}|}{2}\right)^n = \alpha(n)\left(\frac{|A|}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

□

Al termine di questo capitolo, un fondamentale legame tra $\mathcal{L}^n$ ed $\mathcal{H}^n$. Permette di affermare, in maniera informale, che la misura di Hausdorff è una generalizzazione della misura di Lebesgue.

Teorema 2.0.4. *$\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. È utile suddividere la dimostrazione in tre passi.

1) $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$.
Sia $\delta > 0$ e $\{C_i\}$ un δ-ricoprimento di A. Per definizione di misura e per la disuguaglianza isodiametrica vale

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n)\left(\frac{|C_i|}{2}\right)^n.$$

Prendendo l'estremo inferiore al variare dei δ-ricoprimenti di A si trova $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$.

2) $\mathcal{H}^n$ è assolutamente continua rispetto ad $\mathcal{L}^n$, ovvero in simboli:
$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^n(A) = 0$.
Chiamata $c_n = \alpha(n)\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n$, per qualunque cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\alpha(n)\left(\frac{|Q|}{2}\right)^n = c_n\mathcal{L}^n(Q).$$

Di conseguenza basta far tendere δ a zero nella disuguaglianza

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n_\delta(A) &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n)\left(\frac{|Q_i|}{2}\right)^n : \{Q_i\}\ \delta\text{-ricoprimento di } A\right\} \\ &= c_n\mathcal{L}^n(A).\end{aligned}$$

3) $\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$.
Si fissino $\delta, \varepsilon > 0$. È possibile scegliere un δ-ricoprimento $\{Q_i\}$ di A costituito da cubi tale che $\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$. Inoltre, per ogni cubo Q_i, esiste una famiglia numerabile di palle disgiunte chiuse $\{B_k^{(i)}\}$ contenute in Q_i tale che $|B_k^{(i)}| \leq \delta$ e $\mathcal{L}^n(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^{(i)}) = 0$. Dunque, per il passo precedente, $\mathcal{H}^n(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^{(i)}) = 0$ e così

$$\begin{aligned}
H_\delta^n(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^n(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} H_\delta^n(B_k^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(n)\left(\frac{|B_k^i|}{2}\right)^n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} L^n(B_k^i) = \sum_{i=1}^{\infty} L^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} L^n(Q_i) \leq L^n(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Infine si fanno tendere δ ed ε a zero.

$\square$