Seminario di AM310

FORMULA DI AREA

a cura di

Laila Akif
e
Emanuela Iacobone

Introduzione

In questo seminario, prenderemo in considerazione le funzioni Lipschitziane

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

con $n \leq m$. Per queste funzioni enunceremo e dimostreremo la *Formula di Area*, la quale asserisce che la misura di Hausdorff n-dimensionale di $f(A)$, contando le moltiplicità, puo' essere calcolata integrando la Jacobiano di f su A; il nome *Formula di Area* si ispira al caso $n = 2$ e $m = 3$, nel quale la funzione f che interviene, puo' essere interpretata come rappresentazione parametrica di una superficie di $\mathbb{R}^3$. Dalla Formula di Area, deriveremo la Formula di Cambio di Variabile.

Nel primo Capitolo, richiameremo ed enunceremo alcune nozioni utili al nostro scopo; la prima sezione riguarderà le funzioni Lipschitziane e le loro proprietà di differenziabilita', la seconda sezione tratterà le mappe lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, nella terza sezione si introdurranno gli Jacobiani. Nel secondo Capitolo enunceremo e dimostreremo la Formula di Area e la Formula di Cambio di Variabile, concludendo mostrando alcuni esempi di applicazioni della Formula di Area più significativi.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Funzioni Lipschitziane

Definizione.

(i) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ e' detta* ***Lipschitziana*** *se soddisfa*

$$| f(x) - f(y) | \leq C | x - y | \tag{1.1}$$

per qualche costante $C > 0$ e per ogni $x, y \in A$. La piu' piccola costante C che soddisfa la (1.1) per ogni x, y e' denotata

$$Lip(f) \equiv sup \left\{ \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |} \mid x, y \in A, x \neq y \right\}$$

(ii) *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ e' detta* ***localmente Lipschitziana*** *se per ogni compatto $K \subset A$, esiste una costante C_K tale che*

$$| f(x) - f(y) | \leq C_K | x - y |$$

per ogni $x, y \in K$

Per le funzioni Lipschitziane, un risultato notevole e' dato dal

Teorema 1.1.1 (Teorema di Rademacher)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione localmente Lipschitziana. Allora f e' differenziabile $\mathcal{L}^n$ q.o.*

Ricordiamo che

Definizione. *La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e' **differenziabile** in $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste una mappa lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\lim_{x \to y} \frac{| f(x) - f(y) - L(x-y) |}{| x - y |} = 0$$

Se questa mappa lineare L esiste, e' chiaramente unica, e la indichiamo con $Df(x)$.

Osservazione. Il Teorema di Rademacher e' un risultato sorprendente sulle funzioni lipschitziane: la disuguaglianza (1.1) apparentemente infatti non dice nulla sulla possibilita' di poter approssimare localmente f con un mappa lineare.

1.2 Mappe lineari

Richiamiamo alcune definizioni e risultati dell'algebra lineare.

Definizione.

(i) *una mappa lineare $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e' **ortogonale** se $< Ox, Oy > = < x, y >$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$*

(ii) *una mappa lineare $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e' **simmetrica** se $< x, Sy > = < Sx, y >$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$*

(iii) *sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa lineare. L'**aggiunta** di L e' una mappa lineare $L^* : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $< x, A^* y > = < Ax, y >$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$*

Richiamiamo alcune proprieta' dell'operatore aggiunto.

Proposizione 1.

- $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
- se $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e' simmetrica, allora $S^* = S$
- se $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e' ortogonale, allora $O^* = O^{-1}$
- se $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e' ortogonale, allora $n \le m$ e

$$O^* \circ O = I$$

$$O \circ O^* = I$$

Teorema 1.2.1 (Decomposizione Polare)**.**
Sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una mappa lineare e* $n \leq m$*. Allora esistono una mappa simmetrica* $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e una mappa ortogonale* $O : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tale che*

$$L = O \circ S$$

1.3 Jacobiani

Definizione.
Assumiamo $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una mappa lineare, con* $n \leq m$*. Scriviamo, per il Teorema di Decomposizione Polare,* $L = O \circ S$*. Allora si definisce* ***Jacobiano*** *di* L

$$[[L]] = \mid detS \mid$$

.

Osservazione. La definizione di Jacobiano di una mappa lineare e' indipendente dalla particolare scelta di O e S. Si dimostra infatti la seguente

Proposizione 2.
Se $n \leq m$

$$[[L]]^2 = det\,(L^* \circ L)$$

Dimostrazione. Per il teorema di Decomposizione Polare, possiamo scrivere

$$L = O \circ S, \qquad L^* = S^* \circ O^* = S \circ O^*$$

per le proprieta' dell'operatore aggiunto; si ha allora

$$L^* \circ L = S \circ O^* \circ O \circ S = S^2$$

poiche' O e' ortogonale e quindi $O^* \circ O = I$. Dunque

$$det\,(L^* \circ L) = (detS)^2 = [[L]]^2$$

□

Per il calcolo effettivo dello Jacobiano, la Formula di Binet-Cauchy ci fornisce un utile metodo.

Definizione.

(i) se $n \leq m$*, definiamo*

$$\Lambda\,(m, n) = \{\lambda : \{1, ..., n\} \rightarrow \{1, ..., m\} \mid \lambda \ crescente\}$$

(ii) per ogni $\lambda \in \Lambda(m,n)$, definiamo $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$P_\lambda(x_1, ..., x_m) \equiv \left(x_{\lambda(1)}, ..., x_{\lambda(n)}\right)$$

Osservazione. Per ogni $\lambda \in \Lambda(m,n)$, P_λ rappresenta la proiezione di $\mathbb{R}^m$ nel sottospazio n-dimensionale $< \left\{e_{\lambda(1)}, ..., e_{\lambda(n)}\right\} >$

Teorema 1.3.1 (Formula di Binet-Cauchy). *Assumiamo $n \leq m$ e sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare. Allora*

$$[[L]]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (det\,(P_\lambda \circ L))^2$$

Osservazione.

1. Il valore di $[[L]]^2$, e' dunque pari alla somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine n della matrice $m \times n$ che rappresenta L

2. In riferimento al Lemma 1, considerando come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ il cubo unitario n-dimensionale; la Formula di Binet-Cauchy, afferma che il quadrato della misura n-dimensionale di Hausdorff di $L(Q)$ eguaglia la somma dei quadrati delle misure n-dimensionali di Hausdorff delle proiezioni di $L(Q)$ sui piani coordinati n-dimensionali; la Formula di Binet-Cauchy e' dunque una versione del Teorema di Pitagora in dimensione piu' alta.

Ora sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Per il Teorema di Rademacher, f e' differenziabile $\mathcal{L}^n$ q.o., e quindi esiste $Df(x)$ come mappa lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ per $\mathcal{L}^n$ q.o.$x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione. *Lo Jacobiano di f e'*

$$Jf(x) \equiv [[Df(x)]] \qquad (\mathcal{L}^n\ q.o.x)$$

Capitolo 2

La formula di Area

2.1 Preliminari

Lemma. 0 Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lipschitziana, $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < \infty$. Allora

$$\mathcal{H}^n (f (A)) \leq (Lip (f))^s \mathcal{H}^s (A)$$

Lemma 1. Supponiamo sia $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa lineare, $n \leq m$. Allora si ha

$$\mathcal{H}^n (L (A)) = [[L]] \mathcal{L}^n (A)$$

per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$.

Osservazione. Per $n = m$, se consideriamo come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ il cubo unitario n-dimensionale $Q = [0, 1] \times ...[0, 1]$ ritroviamo la formula $\mid detL \mid = vol(L(Q))$

Dimostrazione. Utilizzando la formula di decomposizione polare, scriviamo $L = O \circ S$; ricordiamo che per definizione si ha $[[L]] = \mid detS \mid$.
Se $[[L]] = 0$, allora $dimS (\mathbb{R}^n) \leq n - 1$ e quindi anche $dimL (\mathbb{R}^n) \leq n - 1$; ne segue dunque che, per le proprieta' della misura di Hausdorff, $\mathcal{H}^n (L (\mathbb{R}^n)) = 0$.
Supponiamo quindi $[[L]] > 0$ e calcoliamo

$$\frac{\mathcal{H}^n\left(L\left(B\left(x,r\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B\left(x,r\right)\right)}=\frac{\mathcal{H}^n\left(O^*\circ L\left(B\left(x,r\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B\left(x,r\right)\right)}=\frac{\mathcal{H}^n\left(O^*\circ O\circ S\left(B\left(x,r\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B\left(x,r\right)\right)}=$$
$$=\frac{\mathcal{L}^n\left(S\left(B\left(x,r\right)\right)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B\left(x,r\right)\right)}=\frac{\mathcal{L}^n\left(S\left(B\left(0,1\right)\right)\right)r^n}{\alpha\left(n\right)r^n}=\frac{\mid detS\mid\mathcal{L}^n\left(B\left(0,1\right)\right)}{\alpha\left(n\right)}=\mid detS\mid=$$
$$=[[L]]$$

Definiamo ora $\nu\left(A\right)\equiv\mathcal{H}^n\left(L\left(A\right)\right)$ per tutti gli $A\subset\mathbb{R}^n$. Si ha che ν e' una misura di Radon e $\nu\ll\mathcal{L}^n$ ed e' definita $D_{\mathcal{L}^n}\nu\left(x\right)$, infatti

$$D_{\mathcal{L}^n}\nu\left(x\right)=\lim_{r\to0}\frac{\nu\left(B\left(x,r\right)\right)}{\mathcal{L}^n\left(B\left(x,r\right)\right)}=[[L]]$$

per quanto calcolato sopra. Per tutti gli insiemi di Borel $B\subset\mathbb{R}^n$, il Teorema di Differenziazione delle Misure di Radon [1] implica

$$\mathcal{H}^n\left(L\left(B\right)\right)=\nu\left(B\right)=\int_B D_{\mathcal{L}^n}\nu\left(x\right)dx=[[L]]\,\mathcal{L}^n\left(B\right)$$

Poiche' la misura di Radon e' una misura Borel regolare e ν e $\mathcal{L}^n$ sono misure di Radon, la stessa formula vale per tutti i sottoinsiemi $A\subset\mathbb{R}^n$ □

D'ora in poi assumeremo $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ lipschitziana con $n\leq m$

Lemma 2. Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora

(i) $f\left(A\right)$ e' $\mathcal{H}^n$-misurabile

(ii) la mappa $y\mapsto\mathcal{H}^0\left(A\cap f^{-1}\left\{y\right\}\right)$ e' $\mathcal{H}^n$-misurabile su $\mathbb{R}^m$

(iii) $\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0\left(A\cap f^{-1}\left\{y\right\}\right)d\mathcal{H}^n\leq\left(Lip\left(f\right)\right)^n\mathcal{L}^n\left(A\right)$

---

[1] [1, p.40] *Teorema di Differenziazione delle Misure di Radon.* Siano ν, μ misure di Radon su $\mathbb{R}^n$, con $\nu\ll\mu$. Allora

$$\nu(A)=\int_A D_\mu\nu\;d\mu$$

per ogni $A\subset\mathbb{R}^n$ μ-misurabile

Osservazione. La mappa $y \mapsto \mathcal{H}^0 \left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$ e' detta *funzione molteplicita'*

Dimostrazione. Senza perdita di generalita', possiamo assumere A limitato.

(i) Per la caratterizzazione tramite compatti degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, esistono $K_i \subset A$ compatti tali che

$$\mathcal{L}^n(K_i) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i}$$

con $i = 1, 2, ...$
Poiche' abbiamo assunto $\mathcal{L}^n < \infty$ e A e' $\mathcal{L}^n$-misurabile, $\mathcal{L}^n(A - K_i) < \frac{1}{i}$.
Poiche' f e' continua, $f(K_i)$ e' compatto e quindi $\mathcal{H}^n$-misurabile. Dunque $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_i)\right)$ e' $\mathcal{H}^n$-misurabile. Inoltre, usando il Lemma (0), si ha

$$\mathcal{H}^n\left(f(A) - f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \leq \mathcal{H}^n\left(f\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \leq$$

$$\leq (Lip(f))^n \mathcal{H}^n\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \leq (Lip(f))^n \mathcal{L}^n\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0$$

Poiche' dunque $f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)$ e $f(A) - f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)$ sono $\mathcal{H}^n$-misurabili, $f(A)$ e' $\mathcal{H}^n$-misurabile.

(ii) Ora sia

$$\mathcal{B}_k \equiv \left\{Q \mid Q = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n], a_i = \frac{c_i}{k}, b_i = \frac{c_i + 1}{k}, c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., n\right\}$$

Notiamo che i $Q \in \mathcal{B}_k$ rappresentano un ricoprimento disgiunto di $\mathbb{R}^n$.
Definiamo

$$g_k \equiv \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} \chi_{f(A \cap Q)}$$

che e' $\mathcal{H}^n$-misurabile per il punto 1. e $g_k(y)$ conta il numero di cubi $Q \in \mathcal{B}_k$ tali che $f^{-1}(y) \in A \cap Q$ cioe' i $Q \in \mathcal{B}_k$ tali che $f^{-1}(y) \cap (A \cap Q) \neq \emptyset$.
Per $k \to \infty$

$$g_k(y) \nearrow \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$$

per ogni $y \in \mathbb{R}^m$, allora, come limite di funzioni misurabili, la mappa $y \mapsto \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right)$ e' $\mathcal{H}^n$-misurabile.

(iii) Per il teorema di Convergenza Monotona (Beppo-Levi) e il Lemma 0, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}\{y\}\right) d\mathcal{H}^n = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k d\mathcal{H}^n =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in\mathcal{B}_k} \mathcal{H}^n\left(f\left(A\cap Q\right)\right) \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{Q\in\mathcal{B}_k} \left(Lip\left(f\right)\right)^n \mathcal{L}^n\left(A\cap Q\right) =$$

$$= \left(Lip\left(f\right)\right)^n \mathcal{L}^n\left(A\right)$$

. □

Lemma 3. Sia $t > 1$ e $B \equiv \{x \mid \exists Df\left(x\right), Jf\left(x\right) > 0\}$. Allora esiste una collezione numerabile di sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}^n$, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, tale che valgono le seguenti

(i) $B = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$

(ii) $f\mid_{E_k}$ e' iniettiva con $k = 1, 2, ...$

(iii) per ogni $k = 1, 2, ...$ esiste un automorfismo simmetrico $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$Lip\left(\left(f\mid_{E_k}\right)\circ T_k^{-1}\right) \leq t \qquad Lip\left(T_k \circ \left(f\mid_{E_k}\right)^{-1}\right) \leq t$$

$$t^{-n} \mid detT_k \mid \leq Jf\mid_{E_k} \leq t^n \mid detT_k \mid$$

Osservazione. Per $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare, iniettiva e differenziabile per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, con $JL\left(x\right) > 0$, il Lemma si dimostra (i punti (i) e (ii) risultano banali) considerando come automorfismo simmetrico $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dove S e' tale che, per il Teorema di Decomposizione Polare, $L = O \circ S$. Si ha allora

$$Lip(L\circ S^{-1}) = Lip(O\circ S\circ S^{-1}) = Lip(O) = 1$$

Allo stesso modo si ha

$$Lip(S\circ L^{-1}) = 1$$

Infine, ricordando che $JL = \mid detS \mid$

$$t^{-n} \mid detS \mid \leq JL \leq t^n \mid detS \mid$$

e' banalmente soddisfatta.

Dimostrazione. (i) Fissiamo $\epsilon > 0$ in modo che $\frac{1}{t} + \epsilon < 1 < t - \epsilon$. Sia C un sottoinsieme numerabile denso di B e sia $\mathbf{S}$ un sottoinsieme numerabile denso degli automorfismi simmetrici di $\mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $c \in C$, $T \in \mathbf{S}$ e $i = 1, 2, ...$, definiamo $E(c, T, i)$ come l'insieme dei $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$ che soddisfano

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) \mid Tv \mid \leq \mid Df(b)v \mid \leq (t - \epsilon) \mid Tv \mid \tag{2.1}$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e

$$\mid f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b) \mid \leq \epsilon \mid T(a - b) \mid \tag{2.2}$$

per ogni $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Notiamo che $E(c, T, i)$ e' un insieme di Borel dato che Df e' Borel-misurabile. Da (2.1) e (2.2) segue la stima

$$\frac{1}{t} \mid T(a - b) \leq \mid f(a) - f(b) \mid \leq t \mid T(a - b) \tag{2.3}$$

per $b \in E(c, T, i)$, $a \in B(b, \frac{2}{i})$.
Ora se $b \in E(c, T, i)$ allora si ha

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)^n \mid detT \mid \leq Jf(b) \leq (t - \epsilon)^n \mid detT \mid \tag{2.4}$$

Infatti, scriviamo $Df(b) = L = O \circ S$ per il Teorema di Decomposizione Polare; allora $Jf(b) = [[Df(b)]] = \mid detS \mid$. Per (2.1)

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) \mid Tv \mid \leq \mid (O \circ S)v \mid = \mid Sv \mid \leq (t - \epsilon) \mid Tv \mid$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e dunque

$$\left(\frac{1}{t} + \epsilon\right) \mid v \mid \leq \mid \left(S \circ T^{-1}\right) v \mid \leq (t - \epsilon) \mid v \mid .$$

Cosi'

$$\left(S \circ T^{-1}\right)(B(0, 1)) \subset B(0, t - \epsilon);$$

da dove

$$\mid det\left(S \circ T^{-1}\right) \mid \alpha(n) \leq \mathcal{L}^n(B(0, t - \epsilon)) = \alpha(n)(t - \epsilon)^n,$$

e quindi

$$\mid detS \mid \leq (t - \epsilon)^n \mid detT \mid;$$

questo prova la seconda disuguaglianza della stima (2.4); la dimostrazione dell'altra disuguaglianza e' simile.

(ii) Rinominiamo ora la collezione numerabili di sottoinsiemi $\{E(c,T,i) \mid c \in C, T \in \mathbf{S}, i = 1,2,...\}$ come $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$. Per ogni scelta di $b \in B$, scriviamo $Df(b) = O \circ S$ per il Teorema di Decomposizione Polare, e scegliamo $T \in \mathbf{S}$ tale che

$$Lip\left(T \circ S^{-1}\right) \leq \left(\frac{1}{t} + \epsilon\right)^{-1}, \quad Lip\left(S \circ T^{-1}\right) \leq t - \epsilon$$

Ora prendiamo $i \in \{1,2,...\}$ e $c \in C$ tali che $\mid b - c \mid < \frac{1}{i}$,

$$\mid f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a-b) \mid \leq \frac{\epsilon}{Lip(T^{-1})} \mid a - b \mid \leq \epsilon \mid T(a-b) \mid$$

per ogni $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Allora $b \in E(c,T,i)$. Poiche' questo vale per ogni $b \in B$, il punto (i) e' provato.
Ora consideriamo ogni insieme E_k, che e' della forma $E(c,T,i)$ per qualche $c \in C$, $T \in \mathbf{S}$, $i = 1,2,....$ Sia $T_k = T$. Secondo la (2.3),

$$\frac{1}{t} \mid T_k(a-b) \mid \leq \mid f(a) - f(b) \mid \leq t \mid T_k(a-b) \mid$$

per ogni $b \in E_k$, $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Visto che $E_k \subset B(c, \frac{1}{i}) \subset B(b, \frac{2}{i})$, abbiamo allora che

$$\frac{1}{t} \mid T_k(a-b) \mid \leq \mid f(a) - f(b) \mid \leq t \mid T_k(a-b) \mid \tag{2.5}$$

per ogni $a, b \in E_k$; dunque $f \mid_{E_k}$ e' biunivoca e questo prova (ii).

(iii) Infine notiamo che la (2.5) implica

$$Lip\left((f \mid_{E_k}) \circ T_k^{-1}\right) \leq t \quad Lip\left(T_k \circ (f \mid_{E_k})^{-1}\right) \leq t$$

mentre la (2.4) fornisce la stima

$$t^{-n} \mid detT_k \mid \leq Jf \mid_{E_k} \leq t^n \mid detT_k \mid$$

il punto (iii) e' cosi' dimostrato. $\square$

2.2 Formula di Area e Cambio di Variabile

Teorema. Formula di Area.
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana , $n \leq m$
sia $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile
Allora

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n\{y\}$$

Osservazione (1). Se f è iniettiva si ha che $\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) = \chi_{f(A)}$ dunque si ha

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{f(A)} d\mathcal{H}^n(y)$$

si ha la Formula di Area Continua:

$$\int_A Jf dx = \mathcal{H}^n(f(A))$$

quest'ultima vale in sole ipotesi di lipscitzianità e iniettività; si può eliminare quella di iniettività purché l'area di $f(A)$ venga calcolata tenendo conto delle eventuali sovrapposizioni.

Esempio. Se consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : f(x) = (cost, sint)$, $A = [0, 3\pi]$ in tal caso $\mathcal{H}^n(f(A)) = 2\pi$ mentre $\int_A Jf dt = 3\pi$.
$f(A)$ è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$ ma i punti con ordinata positiva devono essere contati due volte essendo ottenuti due volte come immagini di punti di A, cioè hanno tramite f due contro-immagini anziché una, quindi non vale la formula di area continua, ma la formula di area, che tiene conto di questa molteplicità dato che $\mathcal{H}^0$è la misura che conta.

Osservazione (2). Il Lemma 1 coincide con la formula di area nel caso in cui f è lineare.

Dimostrazione. Il Teorema di Rademacher (1.1.1) implica che $Df(x)$ e $Jf(x)$ esistono $\forall x \in A$.
Supponiamo $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.
Consideriamo i due casi:
caso 1. $A \subset \{x : Jf(x) > 0\} = A_1$;
caso 2. $A \subset \{x : Jf(x) = 0\} = A_2$
Osserviamo che in generale qualsiasi insieme A si può scrivere come $A = A_1 \cup A_2$.
Dimostriamo solo il caso 1. caso 1. fissato $t > 1$ si sceglie una collezione numerabile di insiemi di Bòrel $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ (come nel lemma 3) e si assume che gli insiemi E_j siano disgiunti ,
Sia $F_j^i = E_j \cap\ Q_i \cap A$ tale che $Q_i \in B_k$
dove

$$\mathcal{B}_k \equiv \left\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]\,, a_i = \frac{c_i}{k}, b_i = \frac{c_i + 1}{k}, c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., n \right\}$$

allora gli insiemi F_j^i sono disgiunti e $A = \cup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i$

si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^0(f(F_j^i)) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \tag{2.6}$$

Infatti sia

$$g_k(y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F_j^i)}$$

$g_k(y)$ è il numero degli insiemi F_j^i tale che $F_j^i \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$, allora $g_k(y) \nearrow \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))$ per $k \to \infty$, applicando il teorema di Beppo Levi si ha :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k(y) d\mathcal{H}^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F_j^i)} d\mathcal{H}^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{f(F_j^i)} d\mathcal{H}^n$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j^i)$$

ora per (iii) del Lemma 3 si ha

$$\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(f|_{E_j}(F_j^i))$$

$$= \mathcal{H}^n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_j^i))$$

$$\leq (Lipf|_{E_j} \circ T_j^{-1})^n \mathcal{H}^n(T_j(F_j^i)) \leq t^n \mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

mentre
$\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(T_j(F_j^i)) =$
$\mathcal{H}^n(T_j \circ f \mid_{E_j}^{-1} \circ f(F_j^i)) \leq (LipT_j \circ f \mid_{E_j}^{-1})^n \mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \qquad \leq t^n \mathcal{H}^n(f(F_j^i))$.
Per le disuguaglianze sopra e applicando il Lemma 3 e Lemma 2 ripetutamente :

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq t^{-n}\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

$$= t^{-n}\mathcal{H}^n(T_j(F_j^i)) = t^{-n}|detT_j|\mathcal{L}^n(F_j^i)$$

$$= \int_{F_j^i} t^{-n}|detT_j|dx \leq \int_{F_j^i} Jf\ dx$$

$$\leq \int_{F_j^i} t^n|detT_j|dx = t^n|detT_j|\mathcal{L}^n(F_j^i)$$

$$= t^n\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) \leq t^{2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

quindi si ottiene :

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \int_{F_j^i} Jf\ dx \leq t^{2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

ora sommando sugli i e j :

$$t^{-2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \int_A Jf\ dx \leq t^{2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

passando al limite per $k \to \infty$ e usando la (2.6) si ha:

$$t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n \leq \int_A Jf dx$$

$$\leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n$$

infine per $t \to 1^+$

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y)$$

□

Teorema. Cambio di Variabili. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione Lipschitziana, $n \leq m$
per ogni funzione $\mathcal{L}^n$ sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y)$$

Teorema (Cambio di variabile classico)**.** *: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto misurabile e $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile con continuità tale che sia iniettiva su A e $Jf(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora per ogni funzione $g : f(A) \to \mathbb{R}$ integrabile su $f(A)$, $g \circ f$ è integrabile su $f(A)$ e*

$$\int_{f(A)} g(x) dy = \int_A g(f(x)) Jf(x) dx$$

Osservazione. Osserviamo che il teorema di cambio di variabili è una generalizzazione di quello classico infatti possiamo ridurci al caso classico nel caso in cui la funzione f sia un diffeomorfismo ed $n = m$:
Se si pone $h = g \circ f$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} h \circ f^{-1}(y)\ dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ f \circ f^{-1}\{y\}dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy$$

.

Dimostrazione.
Caso 1. Se $g \geq 0$, per il Teorema di rappresentazione delle funzioni misurabili ([2, Teorema 1.17]), esiste una collezione di insiemi numerabili $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tale che

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\chi_{A_i}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\chi_{A_i}Jf(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i}Jf(x)dx =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{Ai} Jf(x)dx =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\})d\mathcal{H}^n(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{A_i}(x)d\mathcal{H}^n(y)$$

per la formula di area

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\chi_{A_i}(x)d\mathcal{H}^n(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} [\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x)] dH^n(y)$$

Caso 2. Se g è una funzione $\mathcal{L}^n$ sommabile qualsiasi, scriviamo $g = g^+ - g^-$ e applichiamo il Caso 1.

□

2.3 Applicazioni

A.Lunghezza di una curva
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana e iniettiva,

$$f = (f_1, ..., f_m), \qquad Df = (\frac{df_1}{dt}, ..., \frac{df_m}{dt})$$

così che

$$Jf = |Df|$$

Per $-\infty < a < b < \infty$, definiamo la curva

$$C \equiv f([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$$

allora

$$\mathcal{H}^1(C) = \text{"}lunghezza\text{"} \; di \; C \; = \int_a^b |Df| dt$$

B.Area del grafico di una funzione.
Sia $n \geq 1$ $m = n + 1$. Assumiamo $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitziana e definiamo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ come

$$f(x) \equiv (x, g(x))$$

Allora

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Usando la formula di Binet-Cauchy (1.3.1) si ha

$$(Jf)^2 = \; somma \; dei \; quadrati \; dei \; determinanti \; dei \; minori \; n \times n$$

$$= 1 + |Dg|^2$$

Per ogni insieme $U \subset \mathbb{R}^n$ definiamo il grafico di g su U ,

$$G = G(g, U) \equiv \{(x, g(x)) | x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

allora

$$\mathcal{H}^n(G) = \text{"}area\ di\ superficie\text{"}\ di\ G\ = \int_U (1 + |Dg|^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

.

C. Area di superficie di un iperpiano parametrico

Analizziamo solo il caso particolare in cui $n = 2 \quad m = 3$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lipschitziana e iniettiva rappresenta la parametrizzazione di una superficie in $\mathbb{R}^3$; scriviamo

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Allora per la Formula di Binet-Cauchy (1.3.1)

$$(Jf)^2 = \sum_M (detM_{2x2})^2 = |Df(1,2)|^2 + |Df(1,3)|^2 + |Df(2,3)|^2$$

con $|Df(i,j)|$=determinante del minore 2×2 con i-esima e j-esima riga

Per ogni insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, la superficie $S \equiv f(U) \subset \mathbb{R}^3$ quindi

$$\mathcal{H}^n(S) = \int_U Jf dx = \int_U \sqrt{|Df(1,2)|^2 + |Df(1,3)|^2 + |Df(2,3)|^2} dx$$

Bibliografia

[1] Evans- Gariepy , *Measure theory and fine properties of functions* , Boca Raton, CRC Press.

[2] Rudin, *Analisi reale e complessa* , Boringhieri.