AM310 2012: Tracce delle lezioni- 10

DISEGUAGLIANZE DI CONVOLUZIONE

Abbiamo visto come Fubini-Tonelli implichi la seguente diseguaglianza di convoluzione

$$\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \, \|f\|_1 \qquad \forall g, f \in L^1 \qquad (Y1)$$

Piú in generale,

$$g \in L^1, \quad f \in L^p \quad \Rightarrow \quad f * g = g * f \in L^p \quad \text{e} \quad \|g * f\|_p \leq \|g\|_1 \, \|f\|_p \qquad (Yp)$$

giacché (Holder con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) $\quad [\int_{\mathbf{R}^N} |\int_{\mathbf{R}^N} g(x-y) f(y) dy|^p \, dx]^{\frac{1}{p}} \leq$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)||f(y)|^p dy\right) \left(\int_{\mathbf{R}^N} |g(x-y)| dy\right)^{\frac{p}{q}} dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \|g\|_1^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \|g\|_1^{\frac{1}{q}}$$

NOTA 1. (Yp) equivale alla seguente proprietá

$$(f * g) h \in L^1 \quad \forall h \in L^q \quad ed \quad \exists c \geq 0 : \quad |\int_{\mathbf{R}^N} (f * g)(x) h(x) dx| \leq c \|h\|_q \quad \forall h \in L^q$$

Infatti, posto $k := f * g$ e $l(h) := \int kh$, $h \in L^q$, tale l é allora un ben definito funzionale lineare e continuo su L^q, e quindi, per il teorema di Riesz, esiste $\tilde{k} \in L^p$ tale che $\int kh = \int \tilde{k} h \quad \forall h \in L^q$ e quindi, posto $\hat{k} := k - \tilde{k}$, si ha

$$\hat{k} h \in L^1 \quad \forall h \in L^q \qquad e \qquad \int_{\mathbf{R}^N} \hat{k} h = 0 \quad \forall h \in L^q$$

e quindi $\hat{k} \in L^1(B_R) \quad \forall R > 0$ ed anche (prendendo $h = \chi_{E \cap B_R}$) $\int_{E \cap B_R} \hat{k} = 0$ per ogni misurabile E e quindi, per il teorema della media, $\hat{k} = 0$ q.o. e quindi $f * g = k = \tilde{k} \in L^p$.

NOTA 2. Per provare che $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ basterá quindi provare (e poi applicare Fubini) che, se f, g, h sono misurabili non negative e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

$$\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y) g(x-y) \; h(x) \, dx dy| \leq \; \|f\|_p \; \|g\|_1 \; \|h\|_q \qquad (Y)$$

Stabiliamo ora una diseguaglianza di questo tipo quando $f \in L^p, g \in L^r, h \in L^q$, con $p, q, r \geq 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 2$.

DISEGUAGLIANZA DI YOUNG

Siano $p, q, r \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 2.$ *Allora*

$$|\int_{\mathbf{R}^n} (f * g)(x)\ h(x)\, dx| = |\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, h(x)\, dxdy|$$

$$\leq \|f\|_p \, \|g\|_r \, \|h\|_q \qquad (Y)$$

per ogni $f \in L^p$, $g \in L^r$, $h \in L^q$. *In particolare, se* $\frac{1}{s} := \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \geq 0$, *allora*

$$g \in L^r(\mathbf{R}^n), \quad f \in L^p(\mathbf{R}^n) \quad \Rightarrow \quad f * g \in L^s \quad \text{e} \quad \|f * g\|_s \leq \|g\|_r \ \|f\|_p$$

Prova. Se $p = r = 1$ e quindi $q = \infty, s = 1$, la diseguaglianza (Y) si riduce alla (Y1):

$$|\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, h(x)\, dxdy| \leq \|h\|_\infty \, \|g * f\|_1 \leq \ \|h\|_\infty \, \|g\|_1 \, \|f\|_1$$

Se $r = 1$ e $p > 1$, allora p e q sono esponenti coniugati, e quindi la diseguaglianza (Y) si riduce, come visto, alla (Yp).

Caso generale: $p, r > 1$. Se p', q', r' sono gli esponenti coniugati, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'}, \qquad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$$

Dalla diseguaglianza di Holder generalizzata e quindi Fubini

$$|\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} f(y)g(x-y)h(x)dxdy| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(y)|^{\frac{p}{r'}} \times |f(y)|^{\frac{p}{q'}} \times |g(x-y)|^{\frac{r}{p'}} \times |g(x-y)|^{\frac{r}{q'}} \times |h(x)|^{\frac{q}{p'}} \times |h(x)|^{\frac{q}{r'}} dxdy \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(y)|^p |g(x-y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} \times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(y)|^p |h(x)|^q dxdy\right)^{\frac{1}{r'}} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |h(x)|^q |g(x-y)|^r dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\|f\|_p^{\frac{p}{q'}} \ \|g\|_r^{\frac{r}{q'}} \ \|f\|_p^{\frac{p}{r'}} \ \|h\|_q^{\frac{q}{r'}} \ \|h\|_q^{\frac{q}{p'}} \ \|g\|_r^{\frac{r}{p'}} = \|f\|_p \ \|g\|_r \ \|h\|_q$$

NOTA. La condizione $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2$ é necessaria, in quanto la diseguaglianza deve essere invariante rispetto al cambio di scala $x'=tx, y'=ty$: il primo membro cambia per un fattore t^{-2n}, mentre il secondo cambia per un fattore $t^{-n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})}$.

Il caso limite: $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$ (e quindi $q=1,\ s=\infty$). Siano $p,r\geq 1,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{r}=1$. Allora

$$f\in L^p(\mathbf{R}^n),\ \ g\in L^r(\mathbf{R}^n)\ \ \Rightarrow\ \ f{*}g\in C{\cap}L^\infty \ \text{ e, se }\ p>1,\quad \sup_{|x|\geq R}|f{*}g|(x)\to_{R\to+\infty}0$$

É $\int\limits_{\mathbf{R}^n}|g(x-y)|\,|f(y)|dy\leq \|g\|_r\,\|f\|_p$ per ogni x e $|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|\leq$ $\|f\|_p(\int\limits_{\mathbf{R}^n}|g(x+h-y)-g(x-y)|^r dy)^{\frac{1}{r}}\to_{h\to 0}0,$ e quindi $f*g\in C\cap L^\infty$.
Siano poi $g_\epsilon, f_\epsilon\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tali che $\|g-g_\epsilon\|_r+\|f_\epsilon-f\|_p\leq\epsilon$. Da Holder

$$|(g*f)(x)-(g_\epsilon*f_\epsilon)(x)|\leq|[(g-g_\epsilon)*f](x)|+|[g_\epsilon*(f-f_\epsilon)](x)|\leq$$

$$\leq\|g-g_\epsilon\|_r\,\|f\|_p+\|f-f_\epsilon\|_p\,\|g_\epsilon\|_r\leq 2\epsilon(\|g\|_r+\|f\|_p)$$

Dunque $g_\epsilon*f_\epsilon\to_{\epsilon\to 0}g*f$, uniformemente e siccome $g_\epsilon*f_\epsilon$ é chiaramente C_0^∞, allora $g*f$ é continua. Infine, che $g*f$ vada uniformemente a zero all'infinito segue di nuovo dal fatto che $g*f$ é limite uniforme di funzioni a supporto compatto.

NOTA Nel caso limite, $r=1$ e $p=\infty$, allora, di nuovo, $f{*}g$ é definita e continua, ma non decade, in generale, all'infinito (prendi ad esempio $f\equiv 1$).

CONVOLUZIONE CON NUCLEI SINGOLARI

Dato $\lambda\in(0,N)$, scriveremo $G_\lambda(x):=\frac{1}{|x|^\lambda}$. Chiaramente G_λ non appartiene ad alcun $L^r(\mathbf{R}^N)$. Tuttavia G_λ ha proprietá di sommabilita locale:

$$\int\limits_{|x|\leq R}\frac{dx}{|x|^\lambda}\ =\int_0^\infty\mathcal{L}^n(\{x:\frac{1}{|x|^\lambda}\chi_{B_R}(x)>t\})\,dt=\ \frac{N\,vol(B_1)}{N-\lambda}\ R^{N-\lambda}$$

cioé $G_\lambda\in L^1_{loc}$. Ció comporta, in particolare, che se $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, allora

$$(\varphi*G_\lambda)(x)\ :=\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^\lambda}\,dy\ =\int\limits_{\mathbf{R}^N}\frac{\varphi(x-y)}{|y|^\lambda}\,dy$$

é definita per ogni $x\in\mathbf{R}^N$ ed é, per equidominatezza, una funzione $C^\infty(\mathbf{R}^N)$. La convoluzione con nuclei G_λ si estende a tutte le funzioni sommabili, come si vede dalla seguente

DISEGUAGLIANZA DI HARDY-LITTLEWOOD-SOBOLEV (HLS)

Fissati $p, q > 1$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{q} = 2$, *esiste* $c = c(\lambda, N, p)$ *tale che*

$$|\int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda}\, dxdy| \quad \le \quad c \quad \|h\|_q \ \ \|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $h \in L^q(\mathbf{R}^N)$. *In particolare, se* $\frac{1}{s} := \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{p} - 1 \ge 0$, *(ovvero s é l'esponente coniugato di q), allora*

$$\exists c > 0 : \qquad \|G_\lambda \, * \, f\|_s \ \le \ c\, \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$$

In altre parole, l'applicazione $f \to G_\lambda * f$ é ben definita per ogni funzione $L^p, p > 1$ e $Lf := G_\lambda * f$ é infatti lineare e continuo da L^p in L^s, $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{p} - 1$.

NOTA La relazione sopra indicata tra i parametri λ, p, r, N é necessaria perché una siffatta diseguaglianza possa valere, e ció per il suo carattere di invarianza rispetto ai cambi di scala.

La dimostrazione di H-L-S é proposta in Appendice.

HLS: DUE CASI IMPORTANTI

$$p < N \quad \Rightarrow \qquad \|G_{N-1} * f\|_{\frac{Np}{N-p}} \quad \le \quad c(N,p) \ \ \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$$

$$p < \frac{N}{2} \quad \Rightarrow \qquad \|G_{N-2} * f\|_{\frac{Np}{N-2p}} \quad \le \quad c(N) \ \ \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$$

Infatti, $\lambda = N - 1$, $N > \ p \ > \ 1$, $\Rightarrow$ $\frac{1}{s} = \frac{N-p}{Np}$

mentre $\lambda = N-2$, $\frac{N}{2} > p > 1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{s} = \frac{N-2p}{Np}$ $(= \frac{N-2}{2N}$ se $p = \frac{2N}{N+2})$

DUE APPLICAZIONI DI HLS

La convoluzione con nuclei G_λ dá origine a importanti formule di rappresentazione. Cominciamo con una formula relativa all'equazione di Poisson. Sia

$$N \geq 3, \qquad c_N := N(N-2) \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{dy}{(1+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}}, \qquad \mathcal{N} := \frac{G_{N-2}}{c_N}$$

Proposizione. $\quad -\Delta\,(\varphi \, * \, \mathcal{N}) \, = \, \varphi \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)\,.$

Tale formula si basa sulla **formula di integrazione per parti**

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v \;=\; -\int\limits_{\mathbf{R}^N} u\, \frac{\partial v}{\partial x_j} \qquad\qquad \forall u \in C^\infty, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

che é a sua volta conseguenza del Teorema Fondamentale del Calcolo. Ad esempio,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial(u\,v)}{\partial x_1} \;=\; \int\limits_{\mathbf{R}^{N-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(u\,v)}{\partial x_1} \right) dx_2 \dots dx_N \;=0$$

Prova della Proposizione. $\quad$ É $\qquad \Delta\,(\varphi * G_{N-2})(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{(\Delta\,\varphi)(x-y)}{|y|^{N-2}}\, dy$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{\Delta_y[\varphi(x-y)]}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\, dy \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y)\, \Delta_y \, \frac{1}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\, dy$$

$$=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y) \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_j} [-(N-2)\, \frac{y_j}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}} \;]\, dy \;=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y) \; \sum_{j=1}^N [N(N-2) \frac{y_j^2}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}} \; - (N-2) \frac{1}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N}{2}}} \,]\, dy \;=$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi(x-y) \; \frac{-N(N-2)\epsilon^2}{(\epsilon^2+|y|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\, dy \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \; \varphi(x-\epsilon\xi) \; \frac{-N(N-2)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\, d\xi \;=$$

$$=\; -\varphi(x) N(N-2) \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$$

Corollario (I Formula di Rappresentazione) $\;$ Sia $N \geq 3$. Allora

$$\varphi(x) = -\,(\Delta\varphi) * \mathcal{N} = -\,\frac{1}{c_N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{(\Delta\,\varphi)(x-y)}{|y|^{N-2}}\, dy \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

La diseguaglianza $\|G_{N-2} * f\|_{\frac{Np}{N-2p}} \;\le\; c(N)\,\|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$.

Dice che l'operatore lineare $f \to f * \mathcal{N}$ che 'risolve' l'equazione di Poisson con dato $f \in C_0^\infty$ si estende in modo continuo da tutto $L^p(\mathbf{R}^N), p \in (1, \frac{N}{2})$ a $L^{\frac{Np}{N-2p}}$.
In particolare, se $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\varphi_n \to_n f$ in L^p e quindi $\varphi_n * \mathcal{N} \to_n f * \mathcal{N}$ in $L^{\frac{Np}{N-2p}}$, da $-\Delta(\varphi_n * \mathcal{N}) = \varphi_n$, segue, integrando per parti,

$$-\int_{\mathbf{R}^N} (\varphi_n * \mathcal{N})\,\Delta\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi_n \varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

e quindi, passando al limite

$$-\int_{\mathbf{R}^N} (f * \mathcal{N})\,\Delta\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} f\,\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

Quanto trovato si esprime dicendo che

$f * \mathcal{N}$ é soluzione dell'equazione $-\Delta u = f$ in $\mathbf{R}^N$ in senso 'debole'.

II formula di rappresentazione. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $N \ge 3$. Allora

$$\varphi(x) \;=\; \frac{N-2}{c_N} \int_{\mathbf{R}^N} \frac{<(\nabla\varphi)(x-y)\,,\,y>}{|y|^N}\,dy \qquad (*)$$

Prova . 1) Dal Corollario: $\varphi(x) = -\frac{1}{c_N}\sum_j \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_j^2}(x-y)\frac{1}{|y|^{N-2}}\,dy =$

$$\frac{2-N}{c_N}\sum_j \int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(x-y)\frac{y_j}{|y|^N}dy = \frac{N-2}{c_N}\int_{\mathbf{R}^N} <(\nabla\varphi)(x-y), \frac{y}{|y|^N}> dy$$

Giustificazione della integrazione per parti: se $u \in C_0^\infty$, allora $\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{1}{|x|^{N-2}}dx =$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{1}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}dx = -(2-N)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^N} u\frac{x_j}{(\epsilon^2+|x|^2)^{\frac{N}{2}}}dx = (N-2)\int_{\mathbf{R}^N} u\frac{x_j}{|x|^N}dx$$

2). Un calcolo alternativo basato sul Teorema della divergenza: se Ω é aperto limitato e a frontiera liscia e $X \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbf{R}^N)$, allora

$$\int_\Omega div\,X\,dy = \int_{\partial\Omega} <X, \nu>\,d\sigma$$

ove $\nu(y)$ indica la normale esterna ad Ω in $y \in \partial\Omega$. Preso $\quad X(y) := \varphi(x-y)\frac{y}{|y|^N}$,

$$div\, X(y) = < \nabla_y \varphi(x-y), \frac{y}{|y|^N} > + \varphi\, div\, \frac{y}{|y|^N} = - < (\nabla\varphi)(x-y), \frac{y}{|y|^N} >$$

perché $div\, \frac{y}{|y|^N} = div\, \nabla\left(-\frac{1}{(N-2)|y|^{N-2}}\right) = \Delta\left(-\frac{1}{(N-2)|y|^{N-2}}\right) = 0 \quad \forall y \neq 0$. Inoltre, se $\varphi \equiv 0$ fuori della palla B_r, prenderemo $\Omega := \{\epsilon < |y| < r\}$, risultando quindi $\nu(y) = -\frac{y}{|y|}$ se $|y| = \epsilon$. Indicata con ω_N l'area della sfera unitaria in $\mathbf{R}^N$, si trova:

$$\int_{\mathbf{R}^N} \frac{< (\nabla\varphi)(x-y)\, ,\, y >}{|y|^N}\, dy = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{(\nabla\varphi)(x-y)\, ,\, y >}{|y|^N}\, dy =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|=\epsilon} \frac{\varphi(x-y)}{|y|^{N-1}}\, d\sigma = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|y|=\epsilon} \frac{\varphi(x-y)}{\epsilon^{N-1}}\, d\sigma = \omega_N \varphi(x) \qquad (**)$$

NOTA. *Da* $(*)$ *e* $(**)$ *si deduce che* $\quad \omega_N = \frac{c_N}{N-2} = N \int_{\mathbf{R}^N} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$

La diseguaglianza $\|G_{N-1} * f\|_{\frac{Np}{N-p}} \;\leq\; c(N,p)\, \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, insieme alla II formula di rappresentazione dá

LA DISEGUAGLIANZA DI SOBOLEV

Sia $N \geq 3$. Allora

$$\forall p \in (1,N), \exists c = c(N,p) : \quad \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\right)^{\frac{N-p}{N}} \leq c \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Prova della diseguaglianza di Sobolev. $\qquad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \;\Rightarrow$

$$|u(x)| \;\leq\; c \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \;=\; c\, (|\nabla u| * G_{N-1})\,(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^N \;\Rightarrow$$

$$\|u\|_{\frac{Np}{N-p}} \;\leq\; c\, \|G_{N-1} * |\nabla u|\|_{\frac{Np}{N-p}} \;\leq\; c\; \|\nabla u\|_p$$

NOTA. Sobolev vale anche per ogni $N \geq 2$ e $p = 1$. Si puó in effetti dedurre facilmente dal caso $p = 1$, che a sua volta segue dalla diseguaglianza elementare

$$|u(x_1,\ldots,x_N)|^N \;\leq\; \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)dt| \times \ldots \times \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\ldots,t)dt|$$

che implica $\left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx\right)^{\frac{N-1}{N}} \leq$

$$\left[\int\limits_{\mathbf{R}^N}\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)dt|\right)^{\frac{1}{N-1}}\times\ldots\times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\ldots,t)dt|\right)^{\frac{1}{N-1}}\right]dx\right]^{\frac{N-1}{N}}$$

Sfruttando la speciale forma dell'integrando a secondo membro, si puó provare, sempicemente iterando Holder, che

$$\left[\int\limits_{\mathbf{R}^N}\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)dt|\right)^{\frac{1}{N-1}}\times\ldots\times\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\ldots,t)dt|\right)^{\frac{1}{N-1}}\right]dx\right]^{\frac{N-1}{N}}$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{N-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t,x_2,\ldots,x_N)dt|dx_2\ldots dx_N\right)^{\frac{1}{N}} \times\ldots\times$$

$$\left(\int\limits_{\mathbf{R}^{N-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,x_2,\ldots,t)dt|dx_1\ldots dx_{N-1}\right)^{\frac{1}{N}} = \|\frac{\partial u}{\partial x_1}\|_1^{\frac{1}{N}}\times\ldots\times\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\|_1^{\frac{1}{N}} \leq \sum_{j=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_j}\|_1.$$

Diseguaglianza di POINCARÉ. Sia $1 < p < N$, $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ aperto limitato.

Allora $$\exists\, c = c(\Omega) > 0 : \qquad \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \geq c\int\limits_\Omega |u|^p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

Infatti, da $\frac{p}{N} + \frac{N-p}{N} = 1$, usando Holder e quindi Sobolev, segue

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^p \leq \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\right)^{\frac{N-p}{N}} vol(\Omega)^{\frac{p}{N}} \leq M(\Omega)\int\limits_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

Poincaré non vale in $\mathbf{R}^N$: $$\inf_{u\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N),\, u\neq 0} \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u|^p} = 0$$

Se $u_\epsilon(x) := u(\epsilon x)$, é $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |u_\epsilon|^p = \epsilon^{-N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u|^p$, $\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u_\epsilon|^p = \epsilon^{p-N}\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^p$

e quindi $$\frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla_\epsilon u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u_\epsilon|^p} = \epsilon^p\frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^p}{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u|^p} \to_\epsilon 0$$ Allo stesso modo

si vede che $$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega),\, u\neq 0}\frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2}{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u|^2} < \frac{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|\nabla u|^2}{\int\limits_{\mathbf{R}^N}|u|^2} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\Omega)$$

[$l'\inf$ non é realizzato in $C_0^\infty(\Omega)$: $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$ $\exists \epsilon < 1 :$ $u_\epsilon \in C_0^\infty(\Omega)$]

Diseguaglianze di MORREY. Sia $p > N$.

(i) $\forall\, R > 0 \; \exists\; c = c(N,p,R) \;:\quad \|u\|_\infty \le c \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall u \in C_0^\infty(B_R)$

(ii) $\exists c = c(p,N) :\quad |u(x) - u(y)| \le c|x-y|^{\frac{p-N}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$

Prova di (i). $u \in C_0^\infty(B_R),\;\; x \in B_R \;\Rightarrow\; |u(x)| \le c \int_{\mathbf{R}^N} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \le$

$$c \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_R} \frac{1}{|x-y|^{q(N-1)}}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \le c \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{2R}} \frac{dz}{|z|^{q(N-1)}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

perché $p > N \;\Rightarrow\; q(N-1) < N$.

Prova di (ii) Sia $Q_r := \{x : \; |x_i| \le r \;\forall i\}$ (cubo di lato $2r$ centrato nell'origine). Fissato $\overline{x}$, sia $\overline{u} = \frac{1}{2^N\, r^N} \int_{Q_r + \overline{x}} u$ la media di u su $Q := Q_r + \overline{x}$. Per ogni $x \in Q$ risulta

$$|\overline{u} - u(x)| = |\frac{1}{(2r)^N} \int_Q [u(y) - u(x)]\, dy| \le \int_Q \left[\frac{|y-x|}{(2r)^N} \int_0^1 |\nabla u(ty + (1-t)x)|\, dt \right] dy$$

$$\le \frac{\sqrt{N}}{(2r)^{N-1}} \int_0^1 \left(\int_{(1-t)x + tQ} \frac{|\nabla u(z)|}{t^N}\, dz \right) dt \le \frac{\sqrt{N}}{(2r)^{N-1}} \left(\int_Q |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 vol(tQ)^{1-\frac{1}{p}} \frac{dt}{t^N} =$$

$$\sqrt{N}\, (2r)^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 t^{-\frac{N}{p}}\, dt \;=\; c(N,p)\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Dunque, fissati x, y e posto $r = |x-y|$, $\overline{x} = \frac{x+y}{2}$, per cui $x, y \in Q_r + \overline{x}$, si ha

$$|u(x) - u(y)| \le 2c(N,p)\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{Q_{2r}+\overline{x}} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \;=\; 2c(N,p)|x-y|^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Morrey (i) non vale in $\mathbf{R}^N$. Se $u_\epsilon(x) := u(\epsilon x)$, é

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_\epsilon|^p = \epsilon^{p-N} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \qquad \text{mentre} \qquad \|u_\epsilon\|_\infty = \|u\|_\infty$$

APPENDICE: una dimostrazione di H-L-S.

Data $f \geq 0$ misurabile in $\mathbf{R}^N$, sia

$$\chi_f := \chi_{\Gamma_f}, \quad \Gamma_f := \{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times [0,+\infty] : \quad 0 \leq t < f(x)\}$$

Chiaramente Γ_f e quindi χ_f sono misurabili e

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \chi_f(x,t)dt \quad \forall x \in \mathbf{R}^N, \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f = \int_0^{+\infty} |(f > t)|dt$$

ove abbiamo indicato con $|(f > t)|$ la misura dell'insieme $(f > t) := \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) > t\}$ (la seconda uguaglianza deriva da Fubini). Analogamente

$$f^p(x) = p\int_0^{f^p(x)} s^{p-1}ds = p\int_0^{+\infty} \chi_f(x,s)s^{p-1}ds \ , \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f^p = p\int_0^{+\infty} |(f > s)|s^{p-1}ds$$

Infine, effettuando il cambio di variabile $t = \frac{1}{\tau^\lambda}$, vediamo che

$$\frac{1}{|x|^\lambda} = \int_0^{\frac{1}{|x|^\lambda}} dt = \lambda\int_{|x|}^{+\infty} \tau^{-\lambda-1}ds = \lambda\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Prova di (HLS). Dividendo per $\|f\|_p \ \|h\|_r$, (HLS) si riscrive

$$c(N,\lambda,p) \ := \ \sup\{\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda}\, dx\, dy : \quad f,h \geq 0, \|f\|_p = 1 = \|h\|_r\} < +\infty$$

Si tratta cioé di provare che esiste $c = c(N,\lambda,p) > 0$ tale che

$$p\int_0^{+\infty} |(f > t)|t^{p-1}ds = \int_{\mathbf{R}^N} f^p = 1 = \int_{\mathbf{R}^N} h^r = r\int_0^{+\infty} |(h > s)|s^{r-1}ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \left[\left(\int_0^{+\infty} \chi_f(y,t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_h(x,s)ds\right)\left(\int_0^{+\infty} \chi_{\{|x-y|<\tau\}}\tau^{-\lambda-1}d\tau\right)\right] dx\, dy \leq c$$

ovvero, usando Fubini, che $$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} dtdsd\tau \leq c$$

ove si é posto $\quad I(t,s,\tau) := \int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} \chi_f(x,t)\ \chi_h(y,s)\ \chi_{\{|x-y|<\tau\}}\, dx\, dy$.
Osserviamo che

$$\chi_{\{|x-y|<\tau\}} \leq 1 \quad \Rightarrow \qquad I \ \leq \ |(f > t)| \ |(h > s)|$$

$$\begin{aligned}
\chi_h \le 1 \quad &\Rightarrow \quad I \le vol B_\tau \, |(f>t)| = c_N \, \tau^N |(f>t)| \\
\chi_f \le 1 \quad &\Rightarrow \quad I \le vol B_\tau \, |(h>s)| = c_N \, \tau^N \, |(h>s)| \\
&\Rightarrow \quad I \le \frac{c_N \, \tau^N \, |(f>t)| \; |(h>s)|}{\max\{c_N \, \tau^N, \; |(f>t)|, \; |(h>s)|\}}
\end{aligned}$$

Sostituendo τ con $c_N^{\frac{1}{N}} \, \tau$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} \, dt \, ds \, d\tau \le$$

$$\le c_N^{\frac{\lambda}{N}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau^{\lambda+1}} \frac{\tau^N \, |(f>t)| \; |(h>s)|}{\max\{\, \tau^N, \; |(f>t)|, \; |(h>s)|\}} \, d\tau \right) \, ds \, dt$$

Passo 1 Per ogni s, t si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} \, d\tau \le \frac{N \, c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} \, \min\{|(h>s)| \; |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}, \; |(f>t)| \; |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}\}$$

Infatti, se $|(h>s)| \le |(f>t)|$, allora

$$\frac{\tau^N \, |(f>t)| \; |(h>s)|}{\max\{\, \tau^N, \; |(f>t)|, \; |(h>s)|\}} \le \frac{\tau^N \, |(f>t)| \; |(h>s)|}{\max\{\tau^N, \; |(f>t)|\}}$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \le c_N^{\frac{\lambda}{N}} \left[\int_0^{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}} \frac{\tau^N \; |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}} \, d\tau + \int_{|(f>t)|^{\frac{1}{N}}}^{\infty} \frac{|(f>t)| \; |(h>s)|}{\tau^{\lambda+1}} \, d\tau \right]$$

$$= \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{N-\lambda} \, |(h>s)| \; |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} + \frac{c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda} \, |(h>s)| \; |(f>t)|^{1-\frac{\lambda}{N}} =$$

$$= \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(h>s)| \; |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \le \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(f>t)| \; |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Scambiando h ed f, si ottiene

$$|(h>s)| \ge |(f>t)| \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{I(t,s,\tau)}{\tau^{\lambda+1}} d\tau \le \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} |(f>t)| \, |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \le$$

$$\le \frac{N c_N^{\frac{\lambda}{N}}}{\lambda(N-\lambda)} \; |(h>s)| \; |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}}$$

Dal Passo 1 otteniamo

$$\forall T > 0: \qquad \frac{\lambda(N-\lambda)}{Nc_N^{\frac{\lambda}{N}}} \int_{\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N} \frac{h(x)\ f(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \, dt \right) ds + \int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_T^\infty |(f>t)| \, dt \right) ds$$

$$\textit{Ora,} \quad \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \, dt = \int_0^T \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} t^{(p-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{N}} \, dt \ \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty |(f>t)| t^{p-1} \, dt \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^T t^{-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \, dt \right)^{\frac{\lambda}{N}} =$$

$$= \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \left[\frac{T^{[1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}]}}{1-(p-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \right]^{\frac{\lambda}{N}} \ = \ c(\lambda, N, p) T^{(r-1)\frac{p}{r}} \quad \text{perché} \quad \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{N} + \frac{1}{r} = 2 \ \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda}{N} - (p-1)\frac{N-\lambda}{N} = 1 - p + \frac{p\lambda}{N} = 2p - \frac{p}{r} - p = (r-1)\,\frac{p}{r}$$

Dunque, prendendo $\quad T = s^{\frac{r}{p}}, \quad$ vediamo che

$$p \int_0^{+\infty} |(f>t)| t^{p-1} ds = 1 = r \int_0^{+\infty} |(h>s)| s^{r-1} ds \qquad \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \left(|(h>s)| \int_0^{s^{\frac{r}{p}}} \ |(f>t)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \, dt \right) ds \ \leq$$

$$\leq \ c(N, \lambda, p) \ \int_0^\infty \ |(h>s)| \ \ s^{r-1} \, ds \ = \ \frac{c(N, \lambda, p)}{r}$$

Analoga limitazione per il secondo integrale: usando Fubini e poi Holder,

$$\int_0^\infty \left(\ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \int_{s^{\frac{r}{p}}}^\infty |(f>t)| \, dt \right) ds = \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} \, ds \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\ |(f>t)| \int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ |(h>s)|^{\frac{N-\lambda}{N}} s^{(r-1)\frac{N-\lambda}{N}} \ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}} \, ds \right) dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \ |(f>t)| \left(\int_0^\infty |(h>s)| s^{r-1} \, ds \right)^{\frac{N-\lambda}{N}} \ \left(\int_0^{t^{\frac{p}{r}}} \ s^{-(r-1)\frac{N-\lambda}{\lambda}} \, ds \right)^{\frac{\lambda}{N}} \ dt \ =$$

$$c(\lambda, N, p, r) \ \int_0^\infty \ \ |(f>t)| \ \ t^{[\frac{\lambda}{N}-(r-1)\frac{N-\lambda}{N}]\frac{p}{r}} \, dt \ = \ c(\lambda, N, p, r) \ \int_0^\infty \ \ |(f>t)| \ \ t^{p-1} \, dt.$$

AM5: Esercizi e Problemi- 10

Problema 1. Sia $0 \leq \varphi$ sommabile in $\mathbf{R}^n$ tale che $\int_{\mathbf{R}^n} \varphi = 1$. Sia $\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\int_{B_R} |\varphi_\epsilon * f - f\,|^p \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \forall f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^n), \quad \forall R > 0$$

ove $f \in L^p_{loc} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{|x|\leq R} |f|^p < +\infty \quad \forall R > 0.$

Problema 2. Sia f continua in $\mathbf{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty$. Provare che

(i) $f * \varphi(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy$ é definita in tutto $\mathbf{R}^n$ ed é una funzione C^∞.

(ii) $f * \varphi_\epsilon$ converge uniformemente sui compatti ad f.

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy\,|\,dx \ \to_{r\to 0} 0$$

Problema 4 Sia $f \in C(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) : \quad \sup_{x\in\mathbf{R}^N} |f_n(x) - f(x)| \to_{n\to+\infty} 0$$

Esercizio 1. Sia $\alpha \in [0,1)$. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\chi_{(0,1]}$.

Provare che $f * f$ é continua sse $\alpha < \frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\ \chi_{\{|f(x)|\leq n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Stabilire se é vero che

$$f \in C(\mathbf{R}^n),\ \varphi \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad x \to \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\, g(y)dy \qquad \text{é sommabile}$$

AM5: Esercizi e Problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 2. Sia *supp* $\varphi \subset B_1$, $|x| \le R$. Allora

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \ \le \ \int |f(x) - f(x-y)|\varphi_\epsilon(y)\,dy \ =$$

$$\int (\varphi(z)|f(x) \ - \ f(x - \epsilon z)|dz) \ \le$$

$$\le \sup_{x,y\in B_{R+1},\ |x-y|\le\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

per la uniforme continuitá di f in B_{R+1}.

Problema 3. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} f(y)dy|dx \,| \le$

$$\le \frac{1}{r^N volB_1}\int \left(\int |f(x) - f(y)|\chi_{B_r(x)}(y)\,dy\right)\,dx \ =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |\ f(x) \ - \ f(x-z))|\ \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\,dz\right)\,dx \ =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |f(x) \ - \ f(x-r\xi)|\ \chi_{B_1}(\xi)\, r^N\, d\xi\right)\,dx \ =$$

$$= \frac{1}{volB_1} \int \left(\chi_{B_1}(\xi) \int |\ f(x) \ - \ f(x-r\xi)\ |dx\right) d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi) \int |f(x) - f(x-r\xi)|dx \le 2\|f\|_{L^1}\ \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 4.

$f \in C(\mathbf{R}^N)$, $f(x) \to_{|x|\to+\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad f$ é uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}^N$

e quindi, esattamente come nel Problema 2 si vede che ora

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

Sia ora $\chi_n := \chi_{|x|\le n}$. É

$\varphi_\epsilon * (f\chi_n) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $|(\varphi_{\frac{1}{n}} * (f(\chi_n - 1))(x)| \le \sup_{|y|\ge n} |f(y)| \le \epsilon$ se $n \ge n_\epsilon$

e quindi, per $n \geq n_\epsilon$, si ha

$$|(\varphi_{\frac{1}{n}}*(f\chi_n))(x)-f(x)| \leq |(\varphi_{\frac{1}{n}}*(f(\chi_n-1))(x)|+|(\varphi_{\frac{1}{n}}*f)(x)-f(x)|\, leq\epsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

Il viceversa é ovvio:

$$\sup_{\mathbf{R}^N} |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad supp \quad f_{n_\epsilon} \subset B_{R_\epsilon}, \quad |x| \geq R_\epsilon \quad \Rightarrow$$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon$$

Esercizio 1. Se $\alpha < \frac{1}{2}$ allora $f \in L^2$ e quindi $f * f$ é continua:

$$|(f*f)(x+h) - (f*f)(x)| \leq \int |f(x+h-y) - f(x-y)|\, |f(y)|\, dy \ \leq$$

$$\leq \ \|f\|_2 \left(\int |f(x+h-y) - f(x-y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \to_{h \to 0} 0$$

Per discutere il caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$, calcoliamo esplicitamente $f * f$.

$$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{(0,1]}(y)\, \chi_{(0,1]}(x-y) = \chi_{(0,1] \cap [x-1,x)}(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = 0$$

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^\alpha y^\alpha} = \frac{1}{x^{2\alpha}} \int_0^x \frac{dy}{(1-\frac{y}{x})^\alpha\, (\frac{y}{x})^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha\, t^\alpha} \to_{x \to 0^+} +\infty \quad \text{se} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

mentre

$$0 < x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Dunque $f * f$ é discontinua in $x = 0$ se $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Questo é in effetti l'unico punto di discontinuitá:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (f*f)(x) = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \int_{1-\frac{1}{x}}^{1} \frac{dt}{(1-t)^\alpha\, t^\alpha}$$

che é evidentemente continua.