AM310 2012: Tracce delle lezioni- 7

Ricordiamo che se E é normato e $(Jx)(x') := x'(x)$ per ogni $x' \in E', x \in E$, allora $J : E \to (E')'$ é isometria lineare. In generale J non é suriettiva.
E si dice riflessivo sse J' é suriettiva. É vero che (vedi Brezis, Proposizione III.13)

$$\exists x \in E : x'' = Jx \quad \Leftrightarrow \quad x'' \text{ é continuo rispetto alla topologia } \omega^*$$

Ricordiamo che se μ é misura σ-finita su (X, Σ), $E = L^1(\mu)$, e posto, data $g \in L^\infty$, $Lg(f) := \int fgd\mu \quad \forall f \in L^1$, allora $L : L^\infty \to E'$ é isometria suriettiva.
Sia $L' : (E')' \to (L^\infty)'$ il duale di L, ovvero $L'l(g) = l(Lg) \quad \forall l \in (E')',\ g \in L^\infty$, ovvero $L'l = l \circ L$. É facile vedere che anche L' é isometria suriettiva. Dunque, dire che L^1 non é riflessivo equivale a dire che (l'isometria lineare) $L' \circ J$ non é suriettiva.
Notiamo che

$$< (L' \circ J)(f), g >_{(L^\infty)', L^\infty} = < Jf, Lg > = (Lg)(f) = \int fg \quad \forall f \in L^1, g \in L^\infty$$

Dunque, $l = Jf,\ f \in L^1$ sse $\Lambda := L'l = (L' \circ J)(f)$ ovvero $\Lambda(g) = \int fg \quad \forall g \in L^\infty$.
Vogliamo ora mostrare che

$$\exists f \in L^1 : \quad \Lambda(g) = \int fg \quad \Leftrightarrow \quad [g_n \in L^\infty, \int g_n h d\mu \to 0 \quad \forall h \in L^1 \Rightarrow \quad \Lambda(g_n) \to 0]$$

cioé $\Lambda \in \Im(L' \circ J)$ sse Λ é (anche solo sequenzialmente) ω^* continuo.

$\Rightarrow$ Ovvio, giacché $\Lambda(g_n) = \int fg_n$ per qualche $f \in L^1$.
$\Leftarrow$ Proviamolo nell'ipotesi Λ é positivo, cioé $f \geq 0 \Rightarrow \Lambda(f) \geq 0$. Intanto

$$0 \leq \varphi_j \leq \varphi_{j+1} \leq g, \quad g \in L^\infty(\mu) \quad \varphi_j(x) \to g(x) \quad \forall x \quad \stackrel{Leb}{\Rightarrow}$$

$$\int \varphi_j h d\mu \to_j \int g h d\mu \quad \forall h \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda(\varphi_j) \to \Lambda(g) \qquad (*)$$

In particolare, (**certi funzionali lineari sono misure:**) $\mu_l(E) := \Lambda(\chi_E),\ E \in \Sigma$ é misura perché $E_j \in \Sigma, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^n \mu_l(E_j) = \sum_{j=1}^n \Lambda(\chi_{E_j}) = \Lambda(\chi_{\cup_{j \leq n} E_j}) \to_n \Lambda(\chi_{\cup_j E_j}) = \mu_l(\cup_{j=1}^\infty E_j)$$

Ora, per linearitá, $\Lambda(\varphi) = \int \varphi d\mu_l$ se $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$. Poi, se φ_j sono come in $(*)$, é anche $\int \varphi_j d\mu_l \to_j \int g d\mu_l$, e siccome $\Lambda(\varphi_j) \to \Lambda(g)$, concludiamo che $\Lambda(g) = \int g d\mu_l \quad \forall g \in L^\infty, \quad g \geq 0$. Infine, scrivendo $g = g^+ - g^-$, concludiamo che

$$\Lambda(g) = \int g d\mu_l \qquad \forall g \in L^\infty(\mu)$$

Il fatto che $\exists f \in L^1(\mu) : \quad \Lambda(g) = \int fg\, d\mu \quad \forall g \in L^\infty(\mu)$ segue allora dal

TEOREMA DI RADON-NIKODYM

Sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ *sigma algebra ; siano* $\nu, \mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ *misure con* $\nu(X) < \infty$ *e* μ $\sigma-$*finita (cioé* $X = \cup_j E_j, E_j \in \Sigma,\ E_j \subset E_{j+1},\quad \mu(E_j) < \infty$*).*
Allora $\exists f \in L^1(X, \mu),\ \exists Z \in \Sigma$ *con* $\mu(Z) = 0$ *tali che*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Sia $\lambda(E) := \mu(E) + \nu(E), \quad E \in \Sigma,$ per cui per ogni φ semplice e non negativa, $\int \varphi\, d\lambda = \int \varphi\, d\mu + \int \varphi\, d\nu$ e quindi, per ogni h Σ-misurabile

$$\int |h|\, d\lambda = \int |h|\, d\mu + \int |h|\, d\nu \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\mu, \qquad \int |h|\, d\lambda \geq \int |h|\, d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $h \to \int h\, d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \qquad \exists g \in L^\infty(\lambda) : \quad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda \quad \forall h \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\lambda(E)} \int\limits_E g\, d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E\, d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \in [0, 1] \ \Rightarrow$

$$0 \ \leq\ g\ \leq\ 1 \qquad \lambda - q.o.$$

Iteriamo ora $(*)$:

$$(**) \qquad \int h\, d\nu = \int g\, h\, d\lambda = \int gh\, d\mu + \int g^2\, h\, d\lambda = \int (g + g^2) h\, d\mu + \int g^2\, h\, d\nu$$

$$= \ldots\ldots = \int (g + g^2 + \ldots + g^n)\, h\, d\mu + \int g^n\, h\, d\nu \qquad \forall h \in L^1(\lambda)$$

In particolare, posto $h \equiv \chi_{E_j}$ in $(**)$, vediamo che $\nu(X) \geq \int \left(\sum_n g^n\right) \chi_{E_j}\, d\mu$

$$\text{e quindi} \quad \sum_n g^n(x) < +\infty \quad \mu - q.o. \quad \text{e} \quad \mu(\{g = 1\}) = 0$$

Poniamo $f := \sum_n g^n \in L^1(\mu) \quad Z := \{g = 1\}$. Fissata in $(**)$ h limitata e in $L^1(\lambda)$, passando al limite (usando il teorema sulla convergenza dominata) troviamo $\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int\limits_Z h\, d\nu.$ per ogni h limitata e in $L^1(\lambda)$.
Sia infine h soltanto limitata (e misurabile). Allora $\int h\, \chi_{E_j}\, d\nu = \int h\, \chi_{E_j}\, f\, d\mu + \int\limits_Z h \chi_{E_j}\, d\nu$ e passando al limite in j (usando il teorema sulla convergenza dominata) otteniamo

$$\int h\, d\nu = \int h\, f\, d\mu + \int\limits_Z h\, d\nu \qquad \forall h \quad \text{misurabile e limitata}$$

Misure assolutamente continue
misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

Siano μ, ν misure (σ-finita, finita) definite sulla σ-algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}\ (X)$:

$\nu \prec\prec \mu$ (ν é **assolutamente continua** rispetto a μ) se $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.
ν é **singolare** rispetto a μ $(\nu \perp \mu) \Leftrightarrow \exists Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0, \nu(Z^c) = 0$

É vero che : $\exists\ \nu_{ac} \prec\prec \mu,\ \nu_s \perp \mu$ unicamente determinate : $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \qquad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \qquad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicitá é poi facile da verificare.

Ricordiamo che μ (in $\mathbf{R}^n$) é di Radon se é borel regolare e finita sui compatti:
(Regolaritá 1) $\mu(A) = \inf\{\mu(O) :\ A \subset O, O\ aperto\} \quad \forall A \subset \mathbf{R}^n$
(Regolaritá 2) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) :\ K \subset B, K\ compatto\} \quad \forall B \subset \mathbf{R}^n\ boreliano$
(finitezza locale) $\mu(B_r) < \infty \quad \forall r > 0$

IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

Sia l *funzionale lineare su* $C_0(\mathbf{R}^N)$ *tale che* $l(\varphi) \geq 0$ *se* $\varphi \geq 0$. *Allora*

$$\exists \quad \mu \quad \textit{misura di Radon tale che} \qquad l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$$

Lemma. $\forall r > 0 \quad \exists c_r : \quad supp\ \varphi \subset B_r \quad \Rightarrow \quad |l(\varphi)| \leq c_r\ \|\varphi\|_\infty$

Infatti, sia $\psi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$ con $supp\ \psi \subset B_{2r}$ e $\psi \equiv 1$ in B_r. Allora $\|\varphi\|_\infty\, \psi \geq \varphi \geq -\|\varphi\|_\infty\, \psi \quad \Rightarrow$

$$-\|\varphi\|_\infty\, l(\psi) = -l(\|\varphi\|_\infty\, \psi) \leq l(\varphi) \leq\ l(\|\varphi\|_\infty\, \psi) = \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$$

Concludiamo che $|l(\varphi)| \leq \|\varphi\|_\infty\, l(\psi)$.

Prova del Teorema. Sia

$\mu(\Omega) := \sup\{l(\varphi): \ \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N),\ 0 \le \varphi \le 1,\ supp\,\varphi \subset \Omega\},\ \forall \Omega \subset \mathbf{R}^N,$ aperto

$\mu(A) :=\ \ \inf\{\sum_j \mu(\Omega_j): \quad A \subset \cup_j \Omega_j \quad \Omega_j \subset \mathbf{R}^N$ aperti$\}$

Passo 1. μ é misura (ovvero, é numerabilmente subadditiva)
Passo 2. μ é misura di Radon (ovvero é Borel regolare, finita sui compatti)
Passo 3. $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

Prova passo 1. Siano $\Omega \subset \cup_j \Omega_j$ aperti, $K := supp\ \varphi \subset \Omega$. Siccome K é compatto, esiste n tale che $K \subset \cup_{j=1}^n \Omega_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá:

$$0 \le \psi_j \le 1, \quad supp\,\psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_{j=1}^n \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

É $l(\varphi) = l(\sum_{j=1}^n \phi\psi_j) = \sum_{j=1}^n l(\phi\psi_j) \le \sum_{j=1}^\infty \mu(\Omega_j)$ (perché $supp\,\psi_j \subset \Omega_j$)

e quindi $\mu(\Omega) \le \sum\limits_j \mu(\Omega_j)$. In particolare $\mu(A) = \inf\{\mu(\Omega): \quad A \subset \Omega\}$.
Sia ora $A \subset \cup_i A_i$. Possiamo supporre $\mu(A_i) < +\infty \quad \forall i$. Sia $A_i \subset \cup_j \Omega_{ij}$ e

$$\mu(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i} \ge \sum_j \mu(\Omega_{ij})$$

Allora $\epsilon + \sum\limits_i \mu(A_i) \ge \sum\limits_{ij} \mu(\Omega_{ij}) \ge \mu(A)$.

Prova passo 2. Proviamo che μ é misura metrica, e quindi boreliana.
Se $\Omega_i, i = 1,2$ sono aperti disgiunti e $supp\,\varphi_i \subset \Omega_i$, $0 \le \varphi_i \le 1$ allora $supp\,[\varphi_1 + \varphi_2] \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $0 \le \varphi_1 + \varphi_2 \le 1$ e quindi

$l(\varphi_1) + l(\varphi_2) = l(\varphi_1 + \varphi_2) \le \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ e quindi $\mu(\Omega_1) + \mu(\Omega_2) \le \mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)$

Allora, se $d(A_1, A_2) > 0$, esistono Ω_i aperti disgiunti tali che $A_i \subset \Omega_j$ e quindi, se $A_1 \cup A_2 \subset \Omega$ aperto, risulta

$$\mu(\Omega) \ge \mu([\Omega \cap \Omega_1] \cup [\Omega \cap \Omega_2]) = \mu(\Omega \cap \Omega_1) + \mu(\Omega \cap \Omega_2) \ge \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

Passando all'inf: $\mu(A_1 \cup A_2) \ge \mu(A_1) + \mu(A_2)$ e quindi μ é misura metrica.
Poi , μ é Borel regolare, perché $\mu(A) = \mu(\cap \Omega_j)$ se $\mu(A) < +\infty, \mu(A) + \frac{1}{j} \ge \mu(\Omega_j)$.
Infine, $\mu(B_r) < +\infty \quad \forall r > 0$ perché, per il Lemma, $\varphi \in C_0(B_r) \quad \Rightarrow$
$0 \le l(\varphi) \le c_r \|\varphi\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B_r) \le c_r$.

Prova passo 3. Basta provare che $l(\varphi) \leq \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ perché é allora anche $l(-\varphi) \leq \int\limits_{\mathbf{R}^N} [-\varphi]\, d\mu$ e quindi $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

Sia $K := supp\, \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$. Fissato $\epsilon > 0$, siano

$$t_0 < \min\ \varphi < t_1 \ldots < t_n = \max\ \varphi \qquad \text{tali che} \qquad t_j - t_{j-1} \leq \epsilon \quad \forall j$$

$E_j := \varphi^{-1}((t_{j-1}, t_j]) \cap K \subset \Omega_j : \quad \mu(\Omega_j) \leq \mu(E_j) + \dfrac{\epsilon}{n}, \quad \varphi(x) \leq t_j + \epsilon \quad \forall x \in \Omega_j, \quad \forall j$

Notiamo che gli E_j sono disgiunti e $K = \cup_j E_j$. Sia ψ_j partizione dell'unitá:

$$0 \leq \psi_j \leq 1, \quad supp\ \psi_j \subset \Omega_j, \quad \sum_j \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

e quindi $\varphi \equiv \sum_j \varphi\ \psi_j$ e $\varphi\ \psi_j \leq (t_j + \epsilon)\psi_j$. Allora,

$$l(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} l(\varphi\, \psi_j) \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon) l(\psi_j) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\, \mu(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\, \left[\mu(E_j) + \frac{\epsilon}{n}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n} (t_j + \epsilon)\frac{\epsilon}{n} = \sum_{j=1}^{n} (t_j - \epsilon)\mu(E_j) + 2\epsilon\mu(K) + \epsilon(\sup \varphi + \epsilon) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{E_j} \varphi\, d\mu + \epsilon[\, 2\mu(K) + \sup \varphi + \epsilon\,] =$$

perché $t_j - \epsilon < t_{j-1} < \varphi(x) \quad \forall x \in E_j$. Concludendo

$$l(\varphi) \leq \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu + \epsilon[\, 2\mu(K) + \sup \varphi + \epsilon\,] \qquad \forall \epsilon > 0.$$

NOTA. Esattamente come per la misura di Lebesgue si vede che

$$\forall E \quad \text{boreliano} \qquad \mu(E) = \sup\{\mu(K) : \quad K \subset E, \quad K \quad \text{compatto}\}$$

Ció comporta l'**unicitá di** μ:

se $l(\varphi) = \int \varphi d\nu = \int \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, allora, dato un compatto K e preso un aperto Ω contenente K e tale che $\nu(K) + \epsilon \geq \nu(\Omega)$, e presa una $\varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $supp\, \varphi \subset \Omega, \varphi \equiv 1$ su K si ha

$$\mu(K) = \int\limits_K d\mu \leq \int \varphi d\mu = l(\varphi) = \int\limits_K \varphi d\nu \leq \nu(\Omega) \leq \nu(K) + \epsilon$$

Convergenza debole e compattezza per misure di Radon

Definizione. Siano μ_n misure di Radon in $\mathbf{R}^N$. Diremo che

$\mu_n \rightharpoonup \mu$ (converge debolmente a μ) se $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$

Esempio. (i) Siano $0 \le f_n,\ f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\mu_n(E) := \int_E f_n dx$, E boreliano. Allora $\mu_n \rightharpoonup \mu \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbf{R}^N} f_n\ \varphi dx \to \int_{\mathbf{R}^N} \varphi d\mu, \quad \forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$.

(ii) Sia $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\int |f| = 1$, $f_n(x) := n^N |f(nx)|$, $\mu_n(E) := \int_{\mathbf{R}^N} f_n dx$.
Allora $\mu_n \rightharpoonup \delta_0$, ove $\delta_0(E) = 1$ se $0 \in E$ e $\delta_0(E) = 1$ se $0 \notin E$.

Teorema *Siano μ_n misure di Radon tali che* $\sup_n \mu_n(B_R) < +\infty\ \forall R$. *Allora*

$$\exists n_k, \mu : \quad \mu_{n_k} \rightharpoonup_k \mu$$

Prova. Dal Teorema di approssimazione di Weierstrass segue che esiste un insieme numerabile $D \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che

$$\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N), \quad \exists R > 0, \quad \exists \varphi_n \in D \cap C_0(B_R) \quad \text{tale che} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$$

Dall'ipotesi segue che $\forall \varphi \in C_0(\mathbf{R}^N)$, $\sup_n |\int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_n| < +\infty$ e quindi l'argomento diagonale di Cantor assicura che

$$\exists \mu_{n_k} : \quad l(\varphi) := \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_{n_k} \qquad \text{esiste finito} \quad \forall \varphi \in < D >$$

e, ovviamente, l é lineare e positivo e quindi

$$\forall R > 0, \quad \exists c_R : \qquad |l(\varphi)| \quad \le \quad c_R\ \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C_0(B_R)$$

Ció implica che, se $\varphi_n \in C_0(B_R) \cap < D >$, $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \to_n 0$ allora $\lim_n l(\varphi_n)$ esiste finito e dipende solo da φ, ovvero l si estende a un funzionale lineare e positivo su $C_0(\mathbf{R}^N)$. In virtú del Teorema di Riesz esiste una misura di Radon μ tale che

$$l(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu \ = \ \lim_k \int_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\mu_{n_k} \quad \forall \varphi \in < D >$$

Da ció segue facilmente che la convergenza ha infatti luogo su tutto $C_0(\mathbf{R}^N)$.

Esercizi e problemi 6

Esercizio 1. Provare che l^∞ non é separabile.
Trovare una successione $l_n \in (l^\infty)'$ limitata, che non ha estratte debole* convergenti.

Esercizio 2. Sia $c_0 := \{x \in l^\infty : \quad x(j) \to_j 0\}$.

(i) Provare che c_0 é sottospazio lineare chiuso di l^∞ e che

$$\forall a \in l^\infty, \quad \exists a_n \in c_0 : \qquad a_n \rightharpoonup^\star a$$

(non é in particolare vero che $x_n \in C \subset l^\infty$ chiuso e convesso, $x_n \rightharpoonup^\star x$ in $l^\infty \Rightarrow x \in C$).

(ii) Sia $h \in l^1$. Posto $l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_j h(j)\, x(j) \quad \forall x \in c_0$, provare che $Lh := l_h$ é una isometria lineare suriettiva di l^1 su $(c_0)'$ (l^1 é il duale di c_0...ma c_0 non é il duale di l^1!).

(iii) Mostrare con un esempio che non tutte le successioni limitate in c_0 hanno estratte debolmente convergenti.

Esercizio 3. Provare che

$$x_n \in l^1, \quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\|_1 \to_n 0$$

Esercizio 4. Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$

Esercizio 5. Sia $l(\varphi) = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu$, ν misura di Radon.

Supponiamo che l si prolunghi a tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$ in un funzionale della forma $\int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, f\, dx$ con $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Provare che ν é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

CENNI DI SOLUZIONI

Esercizio 1. Sia $A := \{x : \mathbf{N} \to \{0,1\}\ \} = 2^{\mathbf{N}}$. Come noto, A non é numerabile (ha la potenza del continuo). Siccome

$$x, y \in A, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x - y\|_\infty = 1$$

esiste in l^∞ una famiglia non numerabile di palle disgiunte: un insieme denso in l^∞ , dovendo intersecare ciascuna di tali palle, non puó dunque essere numerabile.

Sia $l_n(x) := x(n) \quad \forall x \in l^\infty$. É

$$|l_n(x)| = |x(n)| \leq \sup_j |x(j)| = \|x\|_\infty \quad \text{e quindi} \quad \|l_n\| = 1$$

(infatti, se $e_n(j) := 0$ se $j \neq n$ e $e_n(n) := 1$, allora $l_n(e_n) = 1$).
Siccome $l_{n_k} \rightharpoonup^\star l \quad \Leftrightarrow \quad x(n_k) = l_{n_k}(x) \to l(x)$ implica, in particolare, che $x(n_k)$ converge, tale l non puó esistere perché, quale che sia la selezione n_k esiste una successione limitata x tale che la $k \to x(n_k)$ non converga.

Esercizio 2. (i) Chiaramente,

$$x_n(j) \to_j 0 \quad \forall n, \quad \sup_j |x_n(j) - x(j)| \to_n 0 \quad \Rightarrow$$

$$|x(j)| \quad \leq \quad |x(j) - x_n(j)| + |x_n(j)| \quad \leq \quad 2\epsilon$$

se $n = n_\epsilon$ é abbastanza grande e $j \geq j(n_\epsilon)$, ovvero $x \in c_0$ e quindi c_0 é chiuso in l^∞.

Ricordiamo qui che, pensato $\mathbf{N}$ munito della misura che conta, i corrispondenti L^p si indicano l^p. In particolare, l^∞ é il duale di l^1:

$$\forall\, h \in l^\infty, \quad l_h(x) := \int_{\mathbf{N}} h\, x = \sum_{j=1}^{\infty} h(j)\, x(j) \quad \forall x \in l^1, \quad e \quad Lh := l_h$$

é isometria lineare suriettiva di l^∞ su $(l^1)'$. Esempio: se $b_n := \chi_{\{1,\ldots,n\}}$, $b_n \in c_0$ e $l_{b_n}(x) := \int_{\mathbf{N}} b_n\, x = \sum_{j=1}^{n} x(j) \quad \forall x \in l^1$. Si ha $l_{b_n}(x) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j) = \int_{\mathbf{N}} x = l_{\chi_{\mathbf{N}}}$ ovvero $b_n \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. Piú in generale, $\forall a \in \mathbf{N}$ e posto $a_n := a\, b_n$, risulta

$$l_{a_n}(x) = \sum_j x(j)\, a_n(j) = \sum_{j=1}^{n} x(j)\, a(j) \to_n \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, a(j) = l_a(x) \quad \forall x \in l^1$$

ovvero $\quad a_n \rightharpoonup^\star a$ in l^∞.

(ii) Se, per $h \in l^1$, $Lh := l_h$, $l_h(x) := \sum_j h(j)\, x(j)$, Lh é funzionale lineare e continuo su l^∞ e quindi anche su c_0 con $\|l_h\| = \|h\|_1$ perché $|l_h(x)| \le \|x\|_\infty \sum_j |h(j)|$ e, viceversa, posto $x_n(j) := sign\, h(j)\, b_n(j)$ risulta $x_n \in c_0$, $\|x_n\|_\infty = 1$ e quindi $\|l_h\| \ge l_h(x_n) = \sum_{j=1}^n |h(j)| \quad \forall n$.

Suriettivitá di L. Sia $l \in (c_0)'$ e , posto $e_n := \chi_{\{n\}} \in c_0$, sia $h := (l(e_j))_{j\in\mathbf{N}}$. Intanto, $h \in l^1$, perché $\sum\limits_{j=1}^{n} |h(j)| =$

$$l(\sum_{j=1}^{n} sign\ h(j)\, e_j) \le \|l\|\ \|\sum_{j=1}^{n} sign\ h(j)\, e_j\|_\infty \le \|l\| \ \Rightarrow\ \sum_{j=1}^{\infty} |h(j)| \le \|l\| < \infty$$

Infine $\quad \|x - b_n\, x\|_\infty = \sup\limits_{j\ge n+1} |x(j)| \to_n 0 \quad \forall x \in c_0 \quad \Rightarrow$

$$l(x) = \lim_n l(x\, b_n) = \lim_n [\sum_{j=1}^{n} l(x(j)e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\, l(e_j) = l_h(x)$$

(iii) Come in (ii): $b_n := \chi_{\{1,\dots,n\}} \rightharpoonup^\star \chi_{\mathbf{N}} \notin c_0$. In particolare, $l_{b_n}(e_j) \to_n 1 \quad \forall j$.

Esercizio 3. Per assurdo (passando eventualmente ad una sottosuccessione)

$\exists x_n \rightharpoonup 0$ in l^1 tale che $\|x_n\|_1 \ge \delta > 0$, e quindi, sostituendo x_n con $\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$

$$\exists x_n \rightharpoonup 0 \quad \text{con} \quad \|x_n\|_1 = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Da $x_n \rightharpoonup 0$ ovvero $\sum\limits_j x_n(j)\, a(j) \to_n 0 \quad \forall a \in l^\infty$ segue, prendendo $a = \chi_{\{i\}}$,

$$x_n(i) \to_n 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Quindi, per ogni fissato $m \in \mathbf{N}$, $\quad \sum\limits_{j>m} |x_n(j)| > \frac{3}{4} \quad \forall n \ge n_m$

Siano poi $k_1 < l_1$ tali che $\quad \sum\limits_{j=k_1}^{l_1} |x_1(j)| \ge \frac{3}{4}$.

Detto $n_1 = 1$, sia n_2 tale che se $k_2 > l_1$ ed $l_2 > k_2$ é abbastanza grande risulti

$$\sum_{j=k_2}^{l_2} |x_{n_2}(j)| \ge \frac{3}{4}$$

Iterando, si costruisce una sottosuccessione x_{n_i} tale che, se $k_i > l_{i-1}$ ed l_i é abbastanza grande risulti

$$\forall i \in \mathbf{N}: \qquad \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| \ \ge\ \frac{3}{4} \quad \text{e quindi} \quad \sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)| \le \frac{1}{4}$$

Se $\quad a(j) = \ sign \ x_{n_i}(j) \ \forall j = k_i, \ldots, l_i,$ é $\quad a \in l^\infty$ e quindi $\quad \sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \to_i 0$

mentre $\quad \displaystyle\sum_j x_{n_i}(j)\, a(j) \geq \sum_{j=k_i}^{l_i} |x_{n_i}(j)| - \left[\sum_{j<k_i} |x_{n_i}(j)| + \sum_{j>l_i} |x_{n_i}(j)|\right] \geq \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

contraddizione.

Esercizio 4. (i) Sia $\mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) > 0$. Allora

$$\sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\int_{\{x:\ |f(x)|\geq c\}} |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq c\mu(\{x:\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq c \limsup_{p\to+\infty} \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} = c \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) = 0$$

se $c > \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$ e quindi $\quad \|f\|_\infty \leq \sup_{p\geq 1}(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$

(ii) $\quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \int |f|^p = \int |f| \ |f|^{p-1} \leq \|f\|_1 \ \|f\|_\infty^{p-1}$

$$\Rightarrow \quad \|f\|_p \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \ \|f\|_\infty^{\frac{p-1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Poi, $\quad c < \|f\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \ |f(x)| \geq c\}) > 0$ ed allora

$$\|f\|_p \geq c\, \mu(\{x:\ |f(x)| \geq c\})^{\frac{1}{p}} \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq c \ \Rightarrow \ \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

Esercizio 5. $\quad l(\varphi) := \int\limits_{\mathbf{R}^N} \varphi\, d\nu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é

funzionale lineare e continuo su $C_0(\mathbf{R}^N)$, sottospazio lineare di $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$

(dx indichi la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$; notiamo che nella classe delle funzioni uguali q.o. a una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N), \varphi$ é l'unico rappresentante continuo).

Per Hahn-Banach, l ha un prolungamento lineare e continuo su tutto $L^\infty(\mathbf{R}^N, dx)$.

Supponiamo esista $\quad g \in L^1 : \quad l(f) = \int gf, \quad \forall f \in L^\infty.$ Allora, se E boreliano di misura (di Lebesgue) nulla, si ha che

χ_E é limite q.o. di una successione $\quad \varphi_n \in C_0(\mathbf{R}^N)$, con $\chi_E \leq \varphi_n(x) \leq 1 \quad \forall x$ e quindi

$$l(\varphi_n) = \int \varphi_n\, g \to_n \int \chi_E\, g = 0$$

(per il Teorema di Lebesgue). Ció implica

$$\int \chi_E\, d\nu \leq \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, d\nu = \underline{\lim}_n l(\varphi_n) = \underline{\lim}_n \int \varphi_n\, g = 0$$