Tutorato di AM210 - Soluzioni

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 3: Limiti e continuità in più variabili — Parte 2

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Soluzione Esercizio 3.1.

(3.1.1) Possiamo scrivere

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\tan\left(y^2\right)\right| = \left|\frac{xy^4}{x^2+y^4}\frac{\tan\left(y^2\right)}{y^2}\right| \leq \frac{|x|\,y^4}{x^2+y^4}\left|\frac{\tan\left(y^2\right)}{y^2}\right|$$

Ma $\lim_{y\to 0}\frac{\tan\left(y^2\right)}{y^2} = 1$, mentre

$$\frac{|x|\,y^4}{x^2+y^4} \leq \frac{|x|\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4} = |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\tan\left(y^2\right) = 0$

(3.1.2) Passando in coordinate polari,

$$\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \frac{e^{-\frac{1}{\varrho}}}{\sin\left(\varrho\right)} \xrightarrow[\varrho\to 0^+]{} 0$$

e quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} = 0$

(3.1.3) Il limite proposto non esiste: infatti, se $f(x,y) := \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, si ha

$$f(x,0) = 0, \quad f(x,x^2) = \frac{1}{2}$$

Notiamo però che il limite è nullo lungo ogni retta: infatti, se $y = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f(x,\alpha x) = \frac{\alpha x}{x^2+\alpha^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

(3.1.4) Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

mentre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(x^2+y^5\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(x^2+y^5\right) = 1$$

e quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(x^2+y^5\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$

(3.1.5) Passando in coordinate polari

$$\left|xy\log\left(x^2+y^2\right)\right| = \left|\varrho^2\cos\theta\sin\theta\log\left(\varrho^2\right)\right| \leq \varrho^2\left|\log\left(\varrho^2\right)\right| \xrightarrow[\varrho\to 0^+]{} 0$$

e quindi $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log\left(x^2+y^2\right) = 0$

(3.1.6) Abbiamo

$$\left|\frac{x^2y^{\frac{7}{4}}z^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \leq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^4+y^2+z^4\right)^{\frac{7}{8}}\left(x^4+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(x^4+y^2+z^4\right)^{\frac{1}{24}} \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{} 0$$

Soluzione Esercizio 3.2.

(3.2.1) Sia $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$: chiaramente, f_1 è continua in tutti i punti della forma $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. È invece discontinua nei punti del tipo $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}^*$: infatti

$$\lim_{y\to 0} f(a,y) = a^2 \neq 0 = f(a,0)$$

Infine, f_1 è continua nell'origine: infatti

$$\left|y+\frac{1}{y}\arctan\left(x^2y\right)\right| \leq |y| + x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(3.2.2) Ovviamente $f_2 \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^2\setminus\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x=y\right\}\right)$. Inoltre, $f_2\in\mathscr{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$: infatti, per il Teorema della media integrale, $\exists\xi\in[x,y]$ t.c.

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y e^{t^2}\mathrm{d}t = e^{\xi^2}$$

Quindi

$$\left|\frac{1}{y-x}\int_x^y e^{t^2}\mathrm{d}t - e^{xy}\right| = \left|e^{\xi^2}-e^{xy}\right| \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} \left|e^{a^2}-e^{a^2}\right| = 0$$

i.e., $f_2\in\mathscr{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$

(3.2.3) Scrivendo $t = \sqrt{x^2+(y-1)^4}$, abbiamo $t\to 0 \Leftrightarrow (x,y)\to(0,1)$. Quindi

$$\frac{\log\left(\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}\right)}{\sqrt{x^2+(y-1)^4}} = \frac{1}{2}\frac{\log(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2}$$

i.e., f_3 è continua su tutto $\mathbb{R}^2$

(3.2.4) Abbiamo

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right| \leq \frac{|xy|\,|z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\left(x^2+y^2\right)|z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)|z|}{x^2+y^2+z^2} = |z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

e quindi f_4 è continua su tutto $\mathbb{R}^3$

Soluzione Esercizio 3.3. Ovviamente, $f \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^n \setminus \{(0,\cdots,0)\}\right)$. Abbiamo la seguente **Asserzione**:

$$f \in \mathscr{C}\left(\{(0,\cdots,0)\}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j > 2\beta$$

Prova dell'asserzione: sia $\mathbf{x} := (x_1, \cdots, x_n)$
"$\Leftarrow$":

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{x})| &= \frac{|x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n}}{\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\beta}} = \frac{\left(x_1^2\right)^{\frac{\alpha_1}{2}} \cdots \left(x_1^2\right)^{\frac{\alpha_n}{2}}}{\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\beta}} \le \frac{\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}}{\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\beta}} = \\ &= \left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)^{\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{2} - \beta} \xrightarrow[\mathbf{x} \to (0,\cdots,0)]{} 0\end{aligned}$$

"$\Rightarrow$": Se $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \le 2\beta$, allora

$$f(x,\cdots,x) = \frac{|x|^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{(nx)^{\beta}} = \frac{|x|^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - 2\beta}}{n^{\beta}} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} \frac{1}{n^{\beta}} & \text{se } \sum_{j=1}^{n}\alpha_j = 2\beta \\ \infty & \text{se } \sum_{j=1}^{n}\alpha_j < 2\beta \end{cases}$$

mentre, ad esempio, $f(0, x_2, \cdots, x_n) = 0$. Segue quindi che f è discontinua nell'origine
Soluzione Esercizio 3.4. Abbiamo

$$|f(x,y)| \le \frac{e}{3 + x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$$

ma $f(x,y) < 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e quindi il supremum di f su $\mathbb{R}^2$ non è realizzato e

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$$

Notiamo poi che $f < 0$ e $|f| \ge \dfrac{e}{3}$, quindi $f(x,y) \ge -\dfrac{e}{3}$. Ma $-\frac{e}{3} = f(0,0)$, quindi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\frac{e}{3}$$

Soluzione Esercizio 3.5.

(3.5.1) Applicando il criterio del confronto asintotico, si ha che $\{x_n(k)\}_{k \ge 1}$ ha lo stesso comportamento di $\left\{\dfrac{1}{k}\right\}_{k \ge 1}$, e quindi $x_n \in \ell^p \quad \forall p > 1$ e $x_n \notin \ell^1$

(3.5.2) Sia $x(k) := \dfrac{1}{k}$. Allora, $\forall p \ge 1$ si ha che

$$\begin{aligned}||x_n - x||_p^p &= \sum_{k \ge 1} \left| \frac{1}{k}\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} - \frac{1}{k} \right|^p \le \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^p} \left| \sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} - 1 \right|^p = \\ &= \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^p} \left| \frac{\left(\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} - 1\right)\left(\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} + 1\right)}{\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} + 1} \right| = \\ &= \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^p} \frac{\left|1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)\right|^p}{\left(\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} + 1\right)^p} \le \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^p} \left|1 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)\right|^p \le \\ &\le \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^p} \left(\frac{1}{2kn}\right)^p = \frac{1}{(2n)^p} \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^{2p}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\end{aligned}$$

Quindi, per $p > 1$ abbiamo che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell^p} x$, mentre per $p = 1$ si ha $||x_n - x||_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Soluzione Esercizio 3.6. Chiaramente

$$|f(x,y)| \le |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

I restanti due limiti invece non esistono, poiché non esistono neanche $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ e $\lim_{y\to 0} f(x,y)$: infatti, fissato un $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x, \frac{1}{n}\right) = x \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f\left(x, \frac{\sqrt{2}}{n}\right)$$

In modo del tutto analogo, si vede anche che (ad $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fissato) $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ non esiste