AM210 2011-2012: I ESONERO

TEMA 1. Sia V spazio vettoriale sui reali.

a) Dare la definizione di prodotto scalare in V; enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz ad esso associata.

b) Provare che se $b(x,y)$ é prodotto scalare, allora $\|x\| := [b(x,x)]^{\frac{1}{2}}$ é una norma e $b(x,y) = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

ESERCIZIO 1. Sia $V = \{f \in C((0,+\infty), \mathbf{R}) : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty\}$. Mostrare che $< f, g >; = \int_0^\infty f(x)g(x)dx$ é un prodotto scalare in V.

(a) Stabilire per quali $\alpha > 0$ le seguenti funzioni sono integrabili in senso generalizzato in $[0,\infty)$ e/o stanno in V:

$$(i)\ \frac{\sin t}{t^\alpha} \qquad (ii)\ \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t^\alpha} \qquad \sin(e^{\alpha t})$$

(b) Sia $\|f\|_2^2 =< f, f >$. Sia $V_0 := \{f \in C^1([0,\infty)) : \quad f(0) = 0, f' \in V\}$. Provare che

$$\|f\|_{\frac{1}{2}} := \sup_{x \in [0,\infty)} \tfrac{|f(x)|}{\sqrt{x}} \quad \text{é una norma su } V_0 \quad \text{e} \quad \|f\|_{\frac{1}{2}} \le \|f'\|_2 \quad \forall f \in V_0$$

TEMA 2 Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ chiuso e limitato. Provare che

(a) Ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito.

(b) Ogni successione di elementi di K ha una estratta convergente.

ESERCIZIO 2. Dato $n \in \mathbf{N}$, sia e_n la successione di numeri reali cosí definita:

$$e_n(j) = 0 \quad \text{se} \quad j \ne n, \quad e_n(n) = 1.$$

(a) Stabilire se e_n ha una estratta convergente in l^1 e/o in l^∞

(b) Mostrare che in l^∞ esistono famiglie non numerabili di aperti disgiunti.

(Suggerimento. Considerare $\mathcal{A} := \{x \in l^\infty : x : \mathbf{N} \to \{0,1\}\}$, $\mathcal{O}_r := \{B_r(x) : x \in \mathcal{A}\}$ famiglia di palle aperte in l^∞ ...)

TEMA 3. Sia $B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$, $\quad f : B_r(x_0) \to \mathbf{R}^m$, $\quad f = (f_1, \ldots, f_m)$. Provare che:

(i) f é differenziabile in x_0 se e solo se lo sono le f_i

(ii) se f é differenziabile in x_0 allora f é continua in x_0 e le f_i sono (in x_0) derivabili in tutte le direzioni.

Mostrare con un esempio che una funzione continua puó avere, in un punto, derivate nulle lungo tutte le direzioni senza essere differenziabile in quel punto.

ESERCIZIO 3. Sia $\quad f(x,y) = (x^8 + y^3)^{\frac{1}{3}} - y + y^2.$

(a) Stabilire se f é, in $(0,0)$, parzialmente derivabile, differenziabile, di classe C^1.

(b) Determinare massimi e minimi locali di $\quad g(x,y) := f(x,y) - f^3(x,y)$.

TEMA 4 Siano $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\quad g \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$.

Provare che $g \circ f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ e scrivere la matrice Jacobiana di $g \circ f$.

ESERCIZIO 4.

Scrivere il Laplaciano $\Delta f := f_{xx} + f_{yy}$ in coordinate polari e verificare che, se $f(x,y) = \log\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)$ allora

$$-\Delta f = 4e^{2f}$$

TEMA 5 Sia $f \in C((0,\infty) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Enunciare e dimostrare un Teorema che assicuri che la funzione

$$x \to \int_0^\infty f(t,x)dt$$

sia definita e continua per ogni x.

ESERCIZIO 5. Sia $f(t,x) = \frac{\sin t}{t^{1+x}}$, $\quad t \in (0,\infty),\ x \geq 0$.

Stabilire, argomentando, se $\int\limits_0^\infty f(t,x)dt$ é continua anche in $x = 0$

Alternativamente, mostrare che tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti.

............FINE........................FINE................................FINE...

TEMA 5 Provare che $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in u.

ESERCIZIO 2. Provare che in $\mathbf{R}^n$ tutte le norme sono tra di loro equivalenti.
ESERCIZIO 1. Siano $p, q > 1$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare che

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Dedure che $|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f, g \in C([a,b])$.

TEMA 1. Sia X spazio metrico, $A \subset X$, $\overline{A}$ la chiusura di A. Provare che

$$F \subset X \text{ é chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad F = \overline{F}.$$

TEMA 2 Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. Provare che ogni successione di elementi di K ha estratte convergenti se e solo se ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito.

TEMA 2
TEMA 3. Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ coerciva e semicontinua inferiormente. Provare che

$$\text{per ogni } F \subset \mathbf{R}^n \text{ chiuso esiste } x_F \in F \text{ tale che} \quad f(x_F) \leq f(x) \quad \forall x \in F$$

(**TEMA 3**) Siano X, Y spazi metrici. Provare il Teorema di Heine-Cantor:

$$f \in C(K, Y), \quad K \subset X \quad \text{compatto} \quad \Rightarrow \quad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

TEMA 5. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora
(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)
(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\, h > \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

TEMA 4. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$. Provare che

(i) A connesso per archi $\Rightarrow A$ connesso.

(ii) $A \subset \mathbf{R}$ é connesso se e solo se é un intervallo.

TEMA 4. Provare che l'immagine continua di un connesso é un connesso.

TEMA 4. Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ connesso. Provare il 'Teorema del valore intermedio':

$f : A \to \mathbf{R}$, $f \in C(A) \quad \Rightarrow \quad f(A)$ é un intervallo.

TEMA 5. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$. Provare che f é Lipschitziana sui compatti.
Mostrare con un esempio che f puó non essere Lipschitziana in $\mathbf{R}^n$.

TEMA 5. Sia $f : B_r(x_0) \to \mathbf{R}^m, \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$. Provare che:
(i) f é differenziabile in x_0 se e solo se lo sono le f_i
(ii) se f é differenziabile in x_0 allora f é continua in x_0 e le f_i sono (in x_0) derivabili in tutte le direzioni.
Mostrare con un esempio che una funzione continua puó avere, in un punto, derivate nulle lungo tutte le direzioni senza essere differenziabile in quel punto.

TEMA 5 Provare che $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in u.

TEMA 5. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora
(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)
(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\, h > \geq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

ESERCIZIO 2. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2) - 2(x^2-y^2), \quad g = f^2$.
Determinare i punti stazionari di g e stabilire se si tratta di minimi/ massimi/ selle.

ESERCIZIO 3. Provare che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Utilizzare questa informazione per calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

ESERCIZIO 4. Sia $f(x,y) = \frac{x\, y^3}{x^4+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$.
Stabilire se f é di classe C^1 e, in subordine, se f é differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 5. Determinare il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$ e stabilire, eventualmente, il comportamento al bordo dell'intervallo di convergenza.