AM210: Tracce delle lezioni-VIII Settimana

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).

Sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq \epsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\, dy = 1$, e quindi $|x| \leq R \Rightarrow$

$$|f(x) - (f * \varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \leq \sup_{|x|\leq R,\, |x-y|\leq\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

perché f é uniformemente continua in $[-R-\epsilon, R+\epsilon]$.

Un'applicazione: Il Teorema di aprossimazione di Weierstrass A.

Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-R, R]$ quale che sia R.

Prova . É sufficente provare che

$$\forall R, \quad \exists p_n \text{ polinomi tali che } \quad \sup_{|y|\leq R} |f(y) - p_n(y)| \to 0.$$

Infatti, se questo é vero, si trovano

$$p_1 \text{ tale che } \sup_{|x|\leq 1} |f(x) - p_1(x)| \leq 1,\ \ldots,\ p_n \text{ tale che } \sup_{|x|\leq n} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Dunque, fissato R, $\sup_{|x|\leq n} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ non appena $n \geq R$.

Basta in effetti provare che

$$\forall f \in C(\mathbf{R}), \quad \exists p_n \text{ polinomi tali che } \quad \sup_{|y|\leq \frac{1}{3}} |f(y) - p_n(y)| \to 0.$$

Infatti, se, data f, $\sup_{|x|\le\frac{1}{3}} |f_R(x)-p_n(x)| \to 0$ ove $f_R(x) := f(3Rx)$, é allora $\sup_{|y|\le R} |f(y)-p_n(\frac{y}{3R})| = \sup_{|x|\le\frac{1}{3}} |f(3Rx)-p_n(x)| \to 0$.

Infine, la f fissata si puó supporre nulla fuori di $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$. In effetti, presa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, uguale ad 1 in $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ e nulla fuori di $[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$, basta trovare p_n convergente uniformemente a $f\varphi$ in $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

Sia ora $\psi_n(x) = (1-x^2)^n$, $\varphi_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx}\chi_{[-1,1]}$, $p_n = f * \varphi_n$

I $p_n(x)$, $x \in [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ sono polinomi. Infatti, $|x| \le \frac{1}{3}$, $|y| \ge 1 \Rightarrow |x-y| \ge \frac{2}{3} \Rightarrow f(x-y) = 0$. Quindi, se $|x| \le \frac{1}{3}$, risulta $(f * \psi_n)(x) =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n \chi_{[-1,1]}\,dy = (\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx)(f*\varphi_n)(x)$$

Dunque $f * \varphi_n$ sono, al pari di $f * \psi_n$, polinomi (in $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$).
Proviamo adesso che $p_n \to_n f$ uniformemente in $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$. Ció segue subito da

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n = 1$ (ii) φ_n converge uniformemente a zero in $|x| \ge \delta$ $\forall \delta > 0$

C'é da provare la (ii). Intanto $|x| \ge \delta \Rightarrow \psi_n(x) \le (1-\delta^2)^n$. Poi,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta d\theta \ge 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{n+1}$$

(in effetti é $\int_0^1 (1-s^2)^n ds = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})\right]$). Dunque

$$\sup_{|x|\ge\delta} \varphi_n(x) \le (1-\delta^2)^n\ (n+1) \to_n 0$$

Quindi $|x| \le \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $|f(x)-p_n(x)| = |\int_{-1}^{1} (f(x)-f(x-y))\varphi_n(y)dy| \le$

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x-y)|\varphi_n(y)dy + 2\|f\|_\infty \sup_{|x|\ge\delta} \varphi_n(x) \le \epsilon + \circ(1)$$

se $\delta \le \delta_\epsilon$ ove δ_ϵ é tale che $|x-y| \le \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \epsilon$ (uniforme continuitá di f!).

I polinomi trigonometrici sono densi in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ (teorema di aprossimazione di Weierstrass B)

$C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbf{R})$ indica lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$ che sono 2π-periodiche. In $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ sono definite le norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)|, \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)$$

Un importante sottospazio lineare di $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ é quello dei polinomi trigonometrici

$$P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

1. Un esempio utile : $P_n = (2\cos t)^n$. Dalle formule di Eulero:

$$(2\cos t)^n = (e^{it} + e^{-it})^n = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} e^{ikt} e^{-i(n-k)t} = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{n!}{k!(n-k)!} e^{-i(n-2k)t}.$$

Se n é pari,

$$(2\cos t)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{-i(n-2k)t} + \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{4}{n!} + \sum_{\frac{n}{2}+1}^{k=n} \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{-i(n-2k)t}$$

Ma, ponendo $k = n-j$ nella seconda somma, questa diventa $\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{n!}{j!(n-j)!} e^{-i(-n+2j)t}$.
Quindi

$$(2\cos t)^n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cos(n-2k)t$$

Nel caso di un esponenete dispari, si trova, allo stesso modo,

$$(2\cos t)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{k!((2n+1)-k)!} \cos(2n+1-2k)t$$

2. Convoluzione in $C_{2\pi}$:

$$(f*g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f,g \in C_{2\pi}$$

NOTA Chiaramente $f*g$ é 2π periodica. Inoltre $f*g = g*f$. Infatti, cambiando variabile $t-s=\sigma$, troviamo

$$(f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = (g*f)(t)$$

perché $\quad h \in C_{2\pi}(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = h(x+\pi) - h(x-\pi) \equiv 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = \int_{\pi}^{\pi} h(t)dt$$

3. Approssimazione per convoluzione Siano $g_k \in C_{2\pi}$ tali che

(i) $g_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$
(ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_k(t)dt = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$
(iii) $g_k \to_k 0$ uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \qquad \forall \delta \in (0, \pi)$

Allora

$$\|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$$

Prova. $\quad |(f * g_k)(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi} |\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g_k(s)ds - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_k(s)ds| \leq$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)|g_k(s)ds + 2\|f\|_\infty \epsilon \qquad \forall k \geq k(\delta, \epsilon)$. Se si é scelto δ abbastanza piccolo di modo che $|s| \leq \delta, t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |f(t-s) - f(t)| \leq \epsilon$ (possibile perché f, essendo continua e periodica é uniformemente continua in $\mathbf{R}$), si conclude che

$$|(f * g_k)(t) - f(t)| \leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$$

4. Proviamo che (i)-(ii)-(iii) sono soddisfatte da

$$P_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k = c_k \left(\frac{1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}{2}\right)^k$$

se $c_k = 2\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k\right)^{-1}$. Chiaramente vi é solo da provare (iii).
Stimiamo c_k: $\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = 1$, e, per paritá, $\quad 1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq$

$$\geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{2c_k}{\pi(k+1)} \qquad \text{e quindi} \qquad c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$$

Infine,

$$|t| \in [\delta, \pi] \quad \Rightarrow c_k \left(\frac{1 + \cos t}{2}\right)^k \leq c_k \left(\frac{1 + \cos \delta}{2}\right)^k \leq \frac{\pi(k+1)}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2}\right)^k \to_k 0$$

5. Proposizione Se $f \in C_{2\pi}$ e P_N é polinomio trigonometrico, allora $f * P_N$ é un polinomio trigonometrico.

Basta osservare che $(f * P_N)(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) ds =$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(nt - ns) ds + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(nt - ns) ds$$

e che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(nt - ns) ds = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)[\cos(nt)\cos(-ns) - \sin(nt)\sin(-ns)] ds =$
$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds \right) \cos(nt) + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds \right) \sin(nt)$
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(nt - ns) ds = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s)[\sin(nt)\cos(-ns) + \sin(-ns)\cos(nt)] ds =$
$\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds \right) \sin(nt) - \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds \right] \cos(nt)$

6. Conclusione: P é denso in $C_{2\pi}$. Infatti, se $f \in C_{2\pi}$ e P_n sono come in 1-4, la successione di polinomi trigonometrici $f * P_n$ converge uniformemente a f .

7. Densitá dei polinomi trigonometrici in $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.
$C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ é lo spazio (vettoriale su $\mathbf{C}$) delle funzioni continue e 2π periodiche definite in $\mathbf{R}$ e a valori in $\mathbf{C}$: $f = \Re f + i\Im f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ se e solo se $\Re f$ e $\Im f$ appartengono a $C_{2\pi}(\mathbf{R})$. In $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ sono definite, come in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$, le norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |f(t)| = \sup_{t \in [-\pi,\pi]} |f(t)|, \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

La norma $\|.\|_2$ deriva, anche nel caso di funzioni a valori complessi, da un prodotto scalare, definito come

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g}(t) dt$$

ove $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [\Re f(t) + \Im f(t)] dt := \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Re f)(t) dt + i \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Im f)(t) dt.$
Ovviamente continuano a valere Cauchy-Schwartz e Pitagora. Le funzioni

$e_n := e^{int}, n \in \mathbf{Z}$ formano un *sistema ortonormale* in $(C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_2)$:
$< e_n, e_m >= 0$ se $n \neq m$ e $< e_n, e_n >= 1 \quad \forall n \in \mathbf{Z}$.

Infatti, $< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{i(n-m)2\pi} [e^{i(n-m)t}]_{-\pi}^{\pi} =$
$\frac{1}{i(n-m)2\pi} [e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}] = 0$ per periodicitá. In particolare,

$$\| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Polinomi trigonometrici complessi, ovvero in $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$:

$$P_N=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad c_n\in\mathbf{C},\quad n\in\mathbf{Z},\quad N\in\mathbf{N}$$

Notiamo che P_N é la restrizione a $S^1=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}=\{e^{it}:t\in[-\pi,\pi]\}$ del polinomio di variabile complessa $\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n z^n$. In particolare, $P_N\equiv 0$ se e solo se i suoi coefficenti c_n sono tutti nulli (*principio di identitá*) .
Srivendo $c_n=a_n-ib_n$ ed usando le formule di Eulero, troviamo la rappresentazione

$$P_N=\sum_{n=-N}^{N}[a_n\cos nt+b_n\sin nt]+i\sum_{n=-N}^{N}[a_n\sin nt-b_n\cos nt]$$

Scrivendo $\sum\limits_{n=-N}^{-1}\alpha_n=\sum\limits_{n=1}^{N}\alpha_{-n}$, troviamo $\qquad P_N=a_0-ib_0+$

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n+a_{-n})\cos nt+(b_n-b_{-n})\sin nt+i\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{-n})\sin nt-(b_n+b_{-n})\cos nt$$

Dunque, parte reale e coefficente dell'immaginario di P_N sono polinomi trigonometrici reali e P_N é (polinomio trigonometrico) reale se e solo $c_{-n}=\overline{c_n}$, *il ché appare evidente anche dalla relazione, ottenuta cambiando n in $-m$:*

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}=\overline{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} \quad\Leftrightarrow \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}=\sum_{n=-N}^{N}\overline{c_n}e^{-int}=\sum_{m=-N}^{N}\overline{c_{-m}}e^{imt}$$

che sussiste appunto se e solo se $c_{-n}=\overline{c_n}$. La stessa formula dice anche che ogni polinomio trigonometrico reale é anche polinomio trigonometrico complesso:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nt+b_n\sin nt=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad \text{ove} \quad c_{\pm n}:=\frac{a_n\mp ib_n}{2} \quad \forall n=0,\dots,N$$

Dal Teorema di approssimazione per funzioni in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ segue quindi che

$$\forall f\in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})}\quad \exists P_N,\quad \text{polinomi trigonometrici tali che}\quad \|P_N-f\|_\infty\to_N 0$$

Osserviamo infine che $\qquad f\in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}),\quad P_N=\sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\quad\Rightarrow$

$$(f*P_N)(t):=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{in(t-s)}ds=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left[c_n\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds\right]e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f\in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.