

AM210: Esercizi1

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

Un esempio di integrazione per parti iterata:

$$\int_0^\pi \sin t e^{-at} dt = - \int_0^\pi a e^{-at} \cos t dt + (-\cos t e^{-at})|_0^\pi = -a \int_0^\pi e^{-at} \cos t dt + e^{-a\pi} + 1$$

$$\int_0^\pi \cos t e^{-at} dt = a \int_0^\pi e^{-at} \sin t dt + e^{-at} \sin t |_0^\pi = a \int_0^\pi e^{-at} \sin t dt.$$

Dunque $\int_0^\pi \sin t e^{-at} dt = -a^2 \int_0^\pi \sin t e^{-at} dt + (e^{-a\pi} + 1)$ e quindi

$$\int_0^\pi \sin t e^{-at} dt = \frac{e^{-a\pi} + 1}{1 + a^2}$$

Stabiliamo ora alcune utili formule iterative:

1. Se $F_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} dt$, \acute{e} $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$
2. Se $S_n(x) := \int_0^x \sin^n t dt$, \acute{e} $S_n(x) = (1 - \frac{1}{n})S_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x$
3. Se $C_n(x) := \int_0^x \cos^n t dt$, \acute{e} $C_n(x) = (1 - \frac{1}{n})C_{n-2} + \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x$
4. Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, \acute{e} $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

Esecuzione dei calcoli: 1. $\int_0^x t^n e^{-t} dt = n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt + x^n e^{-x}$

$$2. \int_0^x \sin^n t dt = \int_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t \cos^2 t dt - \sin^{n-1} x \cos x \quad \Rightarrow$$

$$n \int_0^x \sin^n t dt = (n-1) \int_0^x \sin^{n-2} t dt - \sin^{n-1} x \cos x$$

3. Come in 2).

$$4. \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} = - \int_0^x t \frac{d}{dt} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{t}{(1+t^2)^n} \Big|_0^x = 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} =$$

$$2n \int_0^x \left[\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right] dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} \quad \Rightarrow$$

$$2n \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = (2n-1) \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} dt + \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

Preso in 2) $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $S_n := S_n(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ e quindi

$$S_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt = \frac{\pi}{2} \frac{2n-1!!}{2n!!}, \quad S_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t \, dt = \frac{2n!!}{2n+1!!}$$

ove $2n-1!! := 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$, $2n!! := 2 \times 4 \times \dots \times 2n$
 ($n!!$, sopra definito per n dispari, pari, viene chiamato *semifattoriale*).

La formula di Wallis $\frac{\pi}{2} = \left[\frac{2n!!}{2n-1!!} \right]^2 \frac{1}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$

Prova: $0 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow S_n \geq S_{n+1} \Rightarrow \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \geq 1.$

Da $\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}, \quad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{2n-1!!}{2n!!} \frac{2n+1!!}{2n!!} \frac{\pi}{2}$ segue

$$\frac{2n+1}{2n} \geq \left[\frac{2n-1!!}{2n!!} \right]^2 (2n+1) \frac{\pi}{2} \geq 1 \quad \text{e quindi} \quad \frac{\pi}{2} (2n+1) \left[\frac{2n-1!!}{2n!!} \right]^2 = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

NOTA. Wallis $\Rightarrow \frac{2n!!}{2n-1!!} = \sqrt{(2n+1) \left[\frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]} = \sqrt{\frac{\pi(2n+1)}{2}} (1 + O\left(\frac{1}{n}\right)) \Rightarrow$

$$\frac{2n!!}{2n+1!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \quad \frac{\pi}{2} \frac{2n-1!!}{2n!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Proviamo infine, come applicazione dell'integrazione per parti, la

Formula di Taylor con resto integrale . Sia $\varphi \in C^\infty([0, 1])$. Allora,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(t) dt \quad (T)_n$$

Dimostrazione. $(T)_1$ é il TFC: $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t) dt$. $(T)_2$ si ottiene da $(T)_1$ mediante una integrazione per parti :

$$\int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt - (1-t) \varphi'(t) \Big|_0^1 = \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt + \varphi'(0)$$

Analogamente, $(T)_{n+1}$ segue da $(T)_n$ mediante integrazione per parti:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} \varphi^{(n)}(t) dt = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(0)$$

Richiami sugli integrali impropri. Integrazione su intervalli illimitati

Sia f integrabile in $[a, x] \quad \forall x \geq a$. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$ esiste

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$$

si dice **integrale improprio** (o in senso generalizzato) di f su $[a, +\infty)$.

Se tale limite é finito, f si dice **a integrale convergente** (o integrabile in senso generalizzato) su $[a, +\infty)$

In generale, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$ non esiste (ad esempio, se $f(x) = \sin x$) e non ha quindi significato in generale la scrittura $\int_a^{+\infty} f$. Tuttavia, se f é **non negativa**, da $\int_a^y f = \int_a^x f + \int_x^y f \geq \int_a^x f$ se $x \leq y$ segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$ esiste sempre, finito od infinito, e quindi é **sempre definito**

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f$$

L'integrabilit  per funzioni non negative si potr  scrivere nella forma

$$\int_a^{+\infty} f < +\infty$$

UN ESEMPIO FONDAMENTALE : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

Infatti, $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) \rightarrow +\infty$ se $\alpha < 1$. Infine, per $\alpha = 1$ si ha $\int_0^x \frac{dt}{t} = \log x \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$

ALTRI ESEMPI

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$
- 2) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n!$
- 3) $\int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} dt = \frac{1}{n}$
- 4) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Esecuzione dei calcoli.

$$1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan t \Big|_0^x = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad \text{Sia } n = 1: \quad \int_0^x t e^{-t} dt = \int_0^x e^{-t} dt - x e^{-x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Poi, da

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt - x^n e^{-x} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$$

segue

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n!$$

3) Posto $t = \sinh s$ si ha

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} dt =$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sinh^{-1} x} \frac{\sinh^{n-1} s}{\cosh^{n+1} s} ds &= \int_0^{\sinh^{-1} x} \left[\frac{\sinh s}{\cosh s} \right]^{n-1} \frac{d}{ds} \left[\frac{\sinh s}{\cosh s} \right] ds = \frac{1}{n} \left[\frac{\sinh s}{\cosh s} \right]^n \Big|_0^{\sinh^{-1}(x)} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]^n \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$4) \quad \text{Sia } n = 1: \quad \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} + \frac{x}{2(1+x^2)} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

Poi, da

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} &= \frac{2n-1}{2n} \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} + \frac{x}{2n(1+x^2)^n} \\ &\rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \end{aligned}$$

segue

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{2n-1!!}{2n!!} \frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Alternativamente, posto $t = \tan s$, si ottiene: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} s ds$

L'INTEGRALE DI GAUSS: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Il calcolo dell'integrale di Gauss si può effettuare utilizzando la formula di Wallis.

Cominciamo con la disuguaglianza elementare

$$(*) \quad 1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \geq 0$$

La disuguaglianza di sinistra, valida per $x = 0$, segue da $\frac{d}{dx}[e^{-x} - (1-x)] = -e^{-x} + 1 \geq 0$, $\forall x \geq 0$. La disuguaglianza di destra, equivalente a $x - \log(1+x) \geq 0$, segue da

$$\frac{d}{dx}[x - \log(1+x)] = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx$, otteniamo

$$\sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2n!!}{2n+1!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} + o(1) \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} + o(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Condizioni di integrabilità.

Criterio del Confronto Siano f, g integrabili in $[a, x] \forall x \geq a, g \geq 0$. Allora

$$(i) \exists R \geq a : |f(x)| \leq g(x) \forall x \geq R, \int_a^{+\infty} g < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

$$(ii) \exists R \geq a : 0 \leq g \leq |f| \forall x \geq R, \int_a^{+\infty} g = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$$

$$\text{Infatti: (i): } \int_a^x |f| \leq \int_a^R |f| + \int_R^{+\infty} g \forall x \quad (ii): \int_R^x |f| \geq \int_R^x g \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Corollario .

$$(i) \exists M, R > 0, \alpha > 1 : 0 \leq |f|(x) \leq \frac{M}{x^\alpha} \forall x \geq R \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

$$(ii) \exists M, R > 0 : |f|(x) \geq \frac{M}{x}, \forall x \geq R \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$$

Integrabilità e comportamento asintotico.

$$(i) \exists \alpha > 1 : x^\alpha |f(x)| \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} c < +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

$$(ii) x |f(x)| \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} c > 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$$

I criteri sopra esposti sono infatti criteri di

Assoluta integrabilità Sia f integrabile in $[a, x] \forall x \geq a$. f si dice assolutamente integrabile su $[a, +\infty)$ se

$$\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$$

La rilevanza dei criteri di confronto é descritta in particolare dal fatto seguente

L'assoluta integrabilità implica l'integrabilità

$$\int_a^{+\infty} |f| < +\infty \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f$$

Questo fatto é a sua volta una conseguenza del

Criterio di Cauchy. Sia f integrabile in $[a, x] \forall x \geq a$. Allora

$$\exists \int_a^{+\infty} f \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon : x_\epsilon \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq \epsilon)$$

che altro non é che la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente all'infinito, di $F(x) := \int_a^x f$. Infatti : $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f$.

Ed allora, se $\int_a^x |f| < +\infty$, e quindi $\int_a^x |f|$ soddisfa la condizione di Cauchy, anche $\int_a^x f$ soddisfa la condizione di Cauchy, dato che $|\int_{x_1}^{x_2} f| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

NOTA. Una f può essere integrabile senza essere assolutamente integrabile:

CONTROESEMPIO 1. $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n-1, n)}(x)$

(funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n}$ in $[n-1, n)$ e zero in $(-\infty, 0)$).

$$(i) \int_0^{+\infty} |f| = +\infty, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Infatti: (i) $\int_0^x |f| \geq \int_0^{[x]} |f| = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(ii) $\int_0^x f = \int_0^{[x]} f + \int_{[x]}^x f = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{(-1)^n}{n} + \int_{[x]}^x f \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

perché $|\int_{[x]}^x f| \leq \frac{1}{1+[x]} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} 0$.

CONTROESEMPIO 2. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

$$(i) \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{esiste finito}$$

Prova di (i).

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{k\pi} \right| dt = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Prova di (ii).

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt - \frac{\cos t}{t} \Big|_1^x \rightarrow - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt + \cos 1.$$

Infatti $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt < +\infty$ perché $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$.