ST410- Esame 3-2-2011 *(Orlandi)*

Esercizio 1 (16 punti)
Sia $(X_1, \ldots, X_n)$ un campione estratto da $= f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} \chi_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

(1) Determinare lo stimatore T di $\frac{1}{\theta}$ con il metodo della massima verosimiglianza.
(2) Determinare se lo stimatore trovato é o non é distorto.
(3) Si determini la distribuzione di T.
(4) Determinare l' errore quadratico medio.
(5) Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n, $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori *semplicemente consistenti* e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.
(6) Si definisca cosa si intende per statistica sufficiente. É T una statistica sufficiente?
(7) É T un UMVUE (stimatore non distorto a varianza uniformemente minina).
(8) Determinare con la disuguaglianza di Cramer -Rao il limite inferiore della varianza di T

Esercizio 2 (8 punti)
Sia (X_1, X_2) un campione estratto da $f(x, \theta) = \theta x^{\theta-1} \chi_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$. Si vuole verificare

$$H_0 : \theta = 2, \quad \text{contro} \quad H_1 : \theta > 2.$$

Si costruisca un test piú potente di ampiezza $\alpha = 0,05$.

Esercizio 3 (6 punti)
Siano X e Y due variabili casuali indipendenti che assumono valori interi positivi, aventi funzione di distribuzione $f(x) = 2^{-x}$ per $x = 1, 2, \ldots$ Trovare:

(1) $P[min\{X, Y\} \leq a]$ con $a > 0$.
(2) $P(Y > X)$.