MC 420
STORIA DELLA MATEMATICA 1
A.A. 2010-2011
ANA MILLÁN GASCA

LA MATEMATICA GRECA

All'inizio fu lo scriba, cap. 3 e cap. 4 (pp. 45-46)

BIBLIOGRAFIA

CARL B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1999.
IVOR GRATTAN-GUINNESS, "Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: how did he handle them?", *Historia matematica*, 23 (1996), pp. 355-375.
REUBEN NETZ, capitoli sulla matematica greca ed in particolare "Euclide e la matematica del IV secolo", in *Storia della scienza*, vol. I, *La scienza antica*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2000.
CHRISTOPH RIEDWEG, *Pitagora*, Vita e Pensiero, Milano, 2007.
MARIO GEYMONAT, *Il grande Archimede*, Teti Editore, Roma, 2006.
PIER DANIELE NAPOLITANI, *Archimede. Alle radici della scienza moderna*, Collana "I grandi della scienza", anno IV, n. 22 (ottobre 2001).

EDIZIONI DEGLI *ELEMENTI* IN ITALIANO

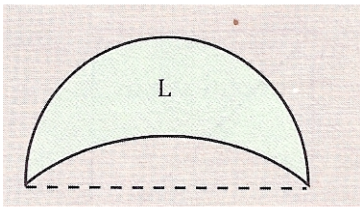
Euclide, *Gli Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, Utet, 1970.
Gli Elementi e la critica antica e moderna, a cura di Federigo Enriques e altri, Bologna, Zanichelli, 1924-1935.

IPPOCRATE DI CHIO

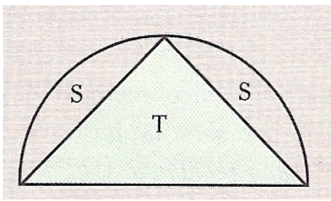
QUADRATURA DELLA LUNULA CHE HA COME ARCO ESTERNO QUELLO DI UN SEMICERCHIO

"Anche le quadrature delle lunule, che sembrano essere tra le figure non banali a causa della loro affinità con il cerchio, furono dimostrate geometricamente da Ippocrate per primo e si ritenne che fossero state trattate in modo corretto; per questo motivo ce ne occuperemo e ne tratteremo a lungo. Si dette come principio e pose come prima tra le <proposizioni> utili ad esse [ossia alle quadrature], che hanno lo stesso rapporto sia tra loro i segmenti simili di cerchi che le loro basi in potenza. Dimostrò questo come conseguenza dell'aver dimostrato che i diametri hanno in potenza lo stesso rapporto dei cerchi. Segmenti simili sono infatti quelli che sono la stessa parte di cerchio, ad esempio semicerchio a semicerchio e terza parte a terza parte. Gli <angoli> dei semicerchi sono tutti retti, e quelli dei <segmenti> maggiori sono minori di tanto quanto i segmenti sono maggiori di semicerchi, e quelli dei <segmenti> minori sono maggiori di tanto quanto i segmenti sono minori.

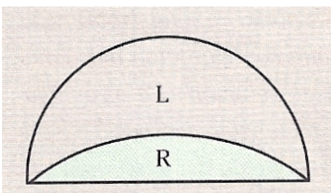
Dimostratosi questo, dimostrò geometricamente in primo luogo in che modo risultasse la quadratura della lunula (L) che ha come arco esterno quello di un semicerchio;



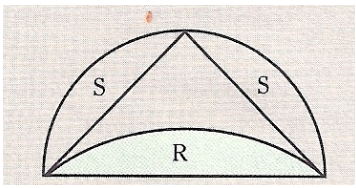
trattò ciò circoscrivendo un semicerchio (l) intorno a un triangolo (T) sia rettangolo che isoscele

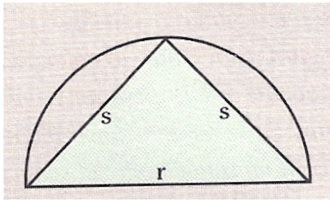


e intorno alla base un segmento di cerchio (R di base r) simile a quelli staccati dalle <rette> congiunte (S di base s).



Ed essendo il segmento intorno alla base uguale ad entrambi <i segmenti> intorno alle altre (R=2S),





e sommata come comune la parte di triangolo sopra il segmento intorno alla base, la lunula sarà uguale al triangolo (l=L+R e l=2S+T, quindi L=T): dimostrata dunque la lunula uguale al triangolo <questa> risulterebbe quadrabile. Così dunque, supponendo come arco esterno della lunula quello di un semicerchio, quadrò agevolmente la lunula"

1. Termini: cerchio, triangolo, triangolo equilatero, triangolo isoscele, segmento di cerchio, segmenti di cerchio simili, "in potenza" (al quadrato), uguale (equiesteso), avere lo stesso rapporto (proporzionalità geometrica)

Nel testo le parole fra < > sono aggiunte per facilitare la lettura, e le parole fra [ ] sono chiarimenti per facilitare la lettura. Le lettere in rosso sono aggiunte per facilitare la lettura in riferimento alle figure.

2. Proposizioni sulle quali si basa la dimostrazione:
   I cerchi hanno in potenza lo stesso rapporto dei diametri in potenza
   I segmenti di cerchio simile hanno lo stesso rapporto delle loro basi in potenza
   Teorema di Pitagora, anche se non indicato esplicitamente: $r^2 = 2s^2$

   Si ha quindi

$$R : S = r^2 : s^2 \text{ e } R = 2S$$

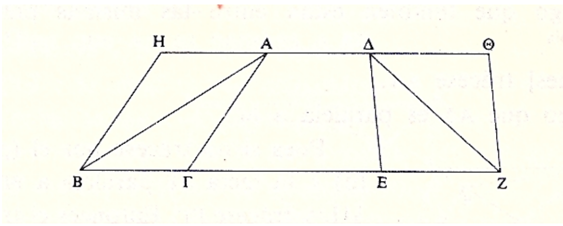
3. La dimostrazione di Ippocrate si basa sul confronto fra due diverse decomposizioni del semicerchio *l*.

ELEMENTI, LIBRO I, PROPOSIZIONE 38

Enunciato (Proposizione)
(*prótasis*) ***I triangoli che sono su basi uguali e nelle stesse parallele sono uguali tra loro.***

Esposizione
(*ékthesis*) Siano triangoli ΑΒΓ, ΔΕΖ [che sono] su basi uguali ΒΓ y ΕΖ e nelle stesse parallele ΒΖ, ΑΔ:

Determinazione
(*diorismós*) dico che il triangolo ΑΒΓ è uguale al triangolo ΔΕΖ.



Costruzione
(*kataskeue*) Sia infatti stata prolungata ΑΔ da una e dall'altra parte fino a Η, Θ, e per [il punto] Β parallela a ΓΑ sia stata condotta una [retta] ΒΗ [1,31], e per [il punto] Ζ parallela a ΔΕ sia stata condotta una [retta] ΖΘ.

Prop. 31. Condurre per il punto dato parallela alla retta data una linea retta.

Dimostrazione
(*apódeixis*) Uno e l'altro degli [delle figure] ΗΒΓΑ, ΔΕ ΖΘ è quindi un parallelogrammo; e ΗΒΓΑ è uguale a ΔΕ ΖΘ – sono infatti sia su basi uguali ΒΓ, ΕΖ che nelle stesse parallele ΒΖ, ΗΘ [I, 36] –;

Prop. 36 I parallelogrammi che sono su basi uguali e nelle stesse parallele sono uguali tra loro.

e metà del parallelogrammo ΗΒΓΑ è il triangolo ΑΒΓ – la diagonale ΑΒ lo seca infatti a metà [I, 34];

Prop. 34 Sia i lati che gli angoli opposti dei domini parallelogrammi sono uguali fra loro, e la diagonale li seca a metà.

e metà del parallelogrammo ΔΕ ΖΘ è il triangolo ΖΕΔ – la diagonale ΔΕΖ lo seca infatti a metà [I, 34];

[e le metà degli uguali sono uguali fra di loro]

Il triangolo ΑΒΓ è quindi uguale al triangolo ΖΕΔ.

Conclusione (*Syumpérasma*) I triangoli che sono su basi uguali e nelle stesse parallele sono quindi uguali tra loro: il che si doveva dimostrare Q. E. D.

Appendice 1 La ricerca di proprietà generali di numeri e figure

La nostra concezione della matematica ha avuto origine nell'antica Grecia, e si è consolidata nel periodo compreso fra il VI e il IV secolo a. C. Il trattato in tredici libri *Elementi* scritto da Euclide ci da conto di quale era il nucleo fondamentale della matematica alla fine di questo periodo di tre secoli straordinariamente fertile intellettualmente.

Abbiamo letto i famoso "frammento di storia della geometria" attribuito ad Eudemo di Rodi, un discepolo di Aristotele, e tramandato attraverso Proclo, che esprime come i Greci vedevano il percorso che aveva portato dalle antiche tradizioni pratiche alla loro idea delle "matematiche". Ricordiamone una parte

> «…da parte di molti si racconta che la geometria fu trovata per la prima volta dagli Egizi, prendendo origine dalla misurazione delle superficie. Essa era infatti necessaria per costoro, a causa della piena del Nilo che cancellava i confini dei campi appartenenti a ciascuno. Non vi è niente di stupefacente che l'invenzione sia di questa che delle altre scienze si sia originata dalla necessità pratica; poiché appunto tutto ciò che è prodotto di generazione procede dall'incompiuto al compiuto. È dunque ragionevole che il passaggio avvenga dalla percezione sensibile al calcolo e da questo alla conoscenza ragionata. Come dunque l'esatta conoscenza dei numeri ebbe inizio presso i Fenici a causa dei commerci e dei traffici, così appunto ance presso gli Egizi la geometria è stata scoperta per la detta ragione. Talete per primo, andato in Egitto, introdusse nell'Ellade questa dottrina […] Dopo questi Pitagora, che trasformò questo studio in un insegnamento libero, indagando da capo i principi e studiandone i teoremi da un punto di vista puramente astratto e intellettuale.»

Le matematiche si allontanavano sia dalla geometria pratica (che i Greci facevano risalire agli Egizi) sia all'aritmetica pratica (che in questo frammento si fa risalire ai Fenici, dai quali i Greci avevano ricevuto la scrittura alfabetica, ma che era padroneggiata da molti popoli dell'area attorno al Mediterraneo e il Vicino Oriente). E si differenziavano per un duplice motivo: perché erano *discipline teoriche*, vale a dire, erano coltivate per il puro gusto del sapere e non per le necessità pratiche; e perché erano rivolte a *oggetti astratti* del pensiero, i numeri e le figure geometriche, indipendentemente dalle loro manifestazione concrete, nei commerci e nell'agrimensura. Le matematiche diventarono nella cultura greca le discipline per eccellenza, il cuore di un'*educazione liberale*. Le matematiche greche includevano quattro diverse dottrine "sorelle": aritmetica, geometria, musica e astronomia.

I pitagorici e la teoria dei numeri

Per i pitagorici, la più importante fra di esse era l'aritmetica: "Tutto è numero", è il motto attribuito al leggendario fondatore di questa setta filosofica, Pitagora (di cui non ci è pervenuto alcuno scritto). Il fascino per i numeri derivava in parte dai rapporti numerici che i pitagorici scoprirono associati alla produzione di suoni musicali. Ma nel pensiero dei pitagorici troviamo l'eco delle antiche idee dei Babilonesi e degli Egizi sul rapporto fra i numeri e l'ordine dell'universo (si veda la Lezione 1 La matematica ll'alba della civiltà).

La aritmetica greca era quindi una teoria dei numeri. Essa trattava soltanto i numeri interi positivi o numeri naturali 1, 2, 3, 4, … (più precisamente, l'uno non era da loro considerato un numero, bensì ciò che generava tutti i numeri)

Esercizio - commento

Le definizioni seguenti sono tratte dall'inizio del libro VII degli *Elementi*, il primo dei tre libri dedicato all'aritmetica.

«I Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno.
II Numero è una pluralità composta da unità.
III Un numero è parte di un numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore. […]
VI Numero pari è quello che è divisibile in due parti uguali.
VII Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti uguali, ossia quello che differisce di un'unità da un numero pari. […]
XI Numero primo è quello che è misurato soltanto dall'unità.
XII Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura comune.
XVI Si dice che un numero moltiplica un numero quando il moltiplicato si aggiunge tante volte come unità vi sono nell'altro e risulta un numero»

(a) Colleghi la definizione di numero con i numeri figurati dei pitagorici.

(b) Confronti l'introduzione dei numeri naturali attraverso la funzione successore e il principio di induzione negli assiomi di Peano con la definizione di unità e di numero in di Euclide.

(c) Nell'insieme dei numeri naturali **N** sono definite due relazioni d'ordine: "essere maggiore o uguale" ed "essere multiplo". Quale di esse è oggetto di una definizione e quale non lo è?

(d) Scriva la definizione III in termini moderni, usando una scrittura simbolica. Quale parola usiamo oggi al posto di "parte"? Confronti entrambe le versioni della definizione, dal punto di vista della precisione e dell'intelligibilità.

(e)Vi sono nelle definizioni III e XI parole non definite?

L'aritmetica greca è all'origine della moderna teoria dei numeri.

Rapporto, proporzione e incommensurabilità

L'idea di proporzionalità presente nella matematica pratica prima dei Greci è stata il punto di partenza di una visione astratta del rapporto (*logos*) fra due numeri e della proporzione come uguaglianza fra due rapporti. Tuttavia, essi non rappresentavano i rapporti attraverso la scrittura di frazioni, anzi, nella matematica greca non vi sono frazioni come veri e propri numeri (nella matematica pratica erano usate le frazioni, ad esempio anche nei testi di Erone di Alessandria, e in astronomia si usavano numeri non interi adoperando la notazione posizionale sessagesimale). Allo stesso modo, i Greci non consideravano nemmeno i numeri interi negativi.

La consapevolezza dei limiti della loro concezione astratta di numero provenne dal problema dell'incommensurabilità: vi erano dei rapporti fra grandezze geometriche di cui non si poteva dar conto attraverso rapporti fra numeri interi. Si consideri ad esempio un quadrato e si tracci la diagonale, che divide il quadrato in due triangoli isosceli. Possiamo considerare il rapporto tra l'area di uno dei triangoli T e l'area del quadrato Q:

$$T : Q$$

Questo rapporto fra aree si può esprimere in forma numerica il rapporto $1:2$ (ossia l'area del triangolo è la metà di quella del quadrato)

$$T : Q = 1 : 2$$

Invece, se consideriamo il rapporto fra la lunghezza del lato l e della diagonale d del quadrato

$$d : l$$

è impossibile trovare due numeri interi a, b tali che

$$d : l = a : b$$

Infatti, la diagonale d è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo a cui può essere applicato il teorema di Pitagora

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2,$$

In un linguaggio moderno, diciamo che il rapporto fra la diagonale e il lato del quadrato è un numero il cui quadrato è 2, ossia $\sqrt{2}$, un numero irrazionale (parola che deriva dal greco *alogos*, "non vi è rapporto").

La geometria come ricerca delle proprietà generali delle figure

Non sorprende quindi che i matematici greci si siano rivolti alle grandezze geometriche (segmenti, aree, volumi) e che le costruzioni e le proprietà delle figure, ossia la geometria, abbiano conquistato il ruolo protagonista nella matematica. I greci avevano ereditato l'antica sapienza orientale sulle figure, la loro suddivisione e i rapporti di misura. Ma essi, come nel caso dei numeri, svilupparono una concezione astratta delle figure: «figure rettilinee sono quelle comprese da rette – si legge negli *Elementi* di Euclide –, vale a dire, figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette». Quindi un trapezio non è più il disegno schematico di un campo, e nemmeno un triangolo un elemento architettonico, entrambi con le loro precise misure e poste in un preciso luogo; la geometria ragiona sulle figure in sé, un trapezio o un triangolo indipendentemente dalla loro realizzazione fisica.

Con ciò non si vuol dire che le misure e le realizzazioni concrete delle figure non avessero interesse per i Greci: i Greci conoscevano l'agrimensura e applicarono la geometria all'astronomia, così come anche all'ottica e alla teoria delle macchine le quali, a loro volte, erano utili alla conduzione delle attività tecnico-pratiche a loro più consoni, come la navigazione e la scenografia teatrale.

Tuttavia, la chiave di volta delle matematiche risiedeva nell'atteggiamento *contemplativo*, ossia nella considerazione di oggetti astratti quali il numero o le figure, che conducono l'intelligenza (riprendendo le parole di Platone) «dal generato alla verità e all'essere». I matematici greci, già nell'epoca arcaica, costruirono un tipo di argomentazione attorno alle figure che sollevò grande interesse anche fra i filosofi. La cultura greca attribuiva molta importanza alla libera discussione e all'argomentazione: la democrazia ateniese fu una democrazia diretta, nella quale i cittadini (gli uomini liberi) discutevano personalmente nell'agorà e si difendevano nei tribunali. Inoltre, vi erano dei maestri itineranti, i sofisti, che si guadagnavano da vivere con l'oratoria, discutendo pubblicamente gli argomenti più vari, dalla medicina alla fisica alla matematica stessa. La filosofia, ponendo al centro la ricerca della verità, rifletteva anche sulle argomentazioni fallaci e ingannevoli. Il ragionamento matematico sulle figure spingeva l'interlocutore all'esame di questioni paradossali, sorprendenti, offrendo nel contempo un modo di argomentare che permetteva di conseguire conoscenze certe.

Così, il frammento di Ippocrate di Chio, risalente al V secolo, trattava la quadratura delle lunule, ossia del problema di trovare un quadrato la cui area sia uguale a quella di una figura qualsiasi a forma di luna. Nella matematica pratica orale antica vi erano delle procedure per trasformare una figura rettilinea in un quadrato della stessa area. Tuttavia, Ippocrate considerava un problema più generale: trasformare una figura curvilinea in una rettilinea; e per riuscire a persuadere della correttezza della sua soluzione costruiva sulla figura un'argomentazione stringente, che lasciava l'interlocutore convinto, ma nel contempo meravigliato e interdetto.

Alla fine del IV secolo a. C. l'opera più importante scritta da Euclide, gli *Elementi*, raccoglieva sistematicamente il corpus di conoscenze di aritmetica e geometria raccolto dai matematici greci, sulla base di alcune premesse basilari e partendo dalle affermazioni più semplici riguardanti i numeri e le figure. L'organizzazione di questo imponente lavoro, frutto anche di uno sforzo collettivo, mostrava la struttura della disciplina e i modi del ragionamento matematico. Negli *Elementi* si distinguono chiaramente, da una parte le premesse del ragionamento e dall'altra, le proposizioni che sono dimostrate sulla base di tali premesse e delle proposizioni già dimostrate, formando insieme la *struttura deduttiva* dell'opera:

– le premesse sono costituite dalle definizioni (a partire da alcune apparentemente evidenti e intuitive come quelle di punto o di unità, fino ad altre estremamente sofisticate) e dai postulati o affermazioni accettate senza dimostrazione.

– le proposizioni sono asserzioni che devono essere dimostrate, formulate con un'ipotesi (i dati o le condizioni) e una tesi che insieme formano l'enunciato. La dimostrazione delle proposizioni consisteva in una catena di ragionamenti che, facendo leva esclusivamente sulle definizioni, sui postulati e sulle proposizioni già dimostrate, permetteva di convincersi del fatto che, ogniqualvolta si verificano le condizioni, si verificherà anche quanto affermato dalla tesi. Le dimostrazioni seguivano un canone ben fissato, e adoperavano un linguaggio tecnico specializzato e alcune formule linguistiche normalizzate. Questo apparato linguistico, che prediligeva la presentazione scritta, era congegnato per evitare gli errori, ed evitava gli inganni dell'intuizione o del senso comune grazie a un accurato rigore logico.

Appendice 2 Verità e rigore logico nella matematica, dagli *Elementi* all'epoca moderna

> «Il metodo assiomatico nella matematica risale perlomeno a Euclide. Non bisogna però credere che la matematica greca si sia sviluppata e si sia presentata esclusivamente nella rigida forma ipotetico-deduttiva degli *Elementi*. Il fatto è che quest'opera suscitò un'impressione così profonda nelle generazioni che seguirono, da diventare il modello di ogni dimostrazione matematica rigorosa. Talvolta persino dei filosofi, per esempio Spinoza nella sua *Ethica ordine geometrico demonstrata*, vollero presentare i loro ragionamenti sotto forma di teoremi dedotti da definizioni e assiomi. Nella matematica moderna, dopo un allontanamento dalla tradizione euclidea nei secoli XVII e XVIII, il metodo assiomatico è penetrato in ogni campo con un'influenza sempre crescente. Uno dei risultati più recenti è la creazione di una nuova disciplina, la logica matematica.»
>
> (Richard Courant, Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica*, pp. 275-76)

Per molti secoli, dall'epoca di Platone e di Aristotele, è stata un'idea condivisa che la matematica fornisse delle verità. Da una parte, le affermazioni o teoremi della matematica erano verità perché dimostrati secondo un metodo che escludeva l'errore, in contrasto con la fallibilità dei nostri sensi. Dall'altra, la matematica ci permetteva di sapere qualcosa di vero sulla natura. Albert Einstein scrisse infatti la geometria può essere considerata la branca più antica della fisica, perché deve la sua esistenza al nostro bisogno di sapere qualcosa circa il comportamento degli oggetti reali. Nel mondo islamico classico (fra il IX e il XIII secolo) i matematici di lingua araba riuscirono persino a conciliare la fiducia nella matematica, opera dell'uomo e fondata dagli studiosi greci, con il credo religioso musulmano. In Occidente, questa idea arrivò indenne fino a Immanuel Kant: la geometria euclidea, ossia l'esposizione contenuta nei libri dedicati alla geometria degli *Elementi* di Euclide, era considerata la descrizione accurata e veritiera dello spazio fisico.

La ricerca matematica è proseguita per molti secoli sulla scia dell'impostazione greca, e i matematici, da al-Hwarizmi a Galileo e a Newton, hanno tentato sempre di dimostrare seguendo il modello fornito dagli *Elementi* nuovi teoremi o proposizioni di aritmetica, di geometria, di algebra o di calcolo infinitesimale. Queste ultime due branche della matematica non esistevano ai tempi dei Greci, ma nel seguito si è tentato di piegare anch'esse al linguaggio geometrico. Così, ad esempio, nel nuovo linguaggio e simbolismo algebrico sviluppato in Europa all'inizio dell'età moderna, x^2 voleva dire un quadrato di lato x, e quindi sembrava un controsenso occuparsi di x^4; allo stesso modo, l'idea di considerare più di tre coordinate – che non presenta nessun ostacolo tecnico – destò scandalo. Anche Newton espresse le sue ricerche matematiche sul moto in linguaggio geometrico.

Tuttavia, i matematici non si sono mai fermati nelle loro indagini davanti a questi aspetti di "rigore", ossia di fronte a possibili lacune nella deduzione logica, e si sono affidati spesso all'intuizione matematica e anche dal loro "gusto" matematico, o anche da sollecitazioni dalla tecnica o dalla fisica. Anche l'ampliamento del sistema dei numeri ben oltre i numeri naturali considerati dai Greci è stato guidato dall'idea intuitiva della continuità della retta geometrica e dalle regole del gioco algebrico (se l'equazione $2x-6=0$ ha soluzione 3 perché non accettare la soluzione -3 dell'equazione $2x+6=0$?). Non di rado un matematico illustre, come il grande Leonhard Euler (1707-1783), correggeva e migliorava poco a poco l'enunciato di un teorema o la sua dimostrazione.

Non sorprende quindi che spesso i matematici si siano corretti fra di loro (ad esempio Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dimostrò correttamente il teorema fondamentale dell'algebra che Euler credeva erroneamente di aver dimostrato): di questo vaglio della comunità matematica vi sono alcuni esempi anche recenti, come le revisioni della dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat da parte di Andrew Wiles oppure della congettura di Poincaré da parte di Perel'man. E non sono mancate critiche dall'esterno, come quelle famose del vescovo inglese Georges Berkeley a Newton e agli studiosi di derivate: la matematica vantava un antico rapporto privilegiato con la filosofia e con la logica (lo studio delle leggi del pensiero), mantenuto in epoca medievale, ma che sembrò un po' incrinarsi proprio a causa delle grandi novità introdotte dai matematici europei moderni.

Lo studio delle geometrie non euclidee nell'Ottocento diede un colpo severo alle certezze dei matematici e alla convinzione che la matematica rendesse accessibili delle verità sul mondo reale. I matematici, tentando di eliminare nella struttura logica della geometria euclidea il quinto e ultimo postulato degli *Elementi*, scoprirono che era possibile concepire delle "teorie", quasi dei "mondi" geometrici diversi, nei quali tale postulato non è valido (si nega il postulato, anche in più di un modo). Non solo: i matematici parlavano apertamente di geometrie non già del piano o dello spazio ma di una dimensione qualsiasi. Si provò allora a ricondurre le basi della matematica agli insiemi numerici, tentando di stabilire ciò che prima veniva tralasciato, ossia i rapporti logici fra i numeri naturali e il resto dei numeri "aggiunti" dalla matematica nel corso dei secoli.

A queste domande riguardanti le fondamenta dell'imponente edificio matematico, i matematici hanno tentato di dar risposta fra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, impegnandosi su vari fronti. Da una parte, si sviluppò una nuova metodologia matematica per studiare la logica, ossia le regole del ragionamento, trasferendola proprio dalla matematica. Inoltre, la teoria degli insiemi proponeva di considerare idee come quelle di appartenenza o di estensione, a cavallo fra logica e matematica, per chiarire i primi mattoni comuni a tutte le branche della matematica, ed in particolare l'idea di numero. Ma fu soprattutto la metodologia assiomatica a modificare profondamente il paesaggio della matematica.

Individuare ed esporre in modo chiaro gli assiomi fondanti di ogni teoria è una prassi consolidata nella matematica moderna. In questo i matematici seguono i passi dei matematici greci, e soprattutto l'esempio della trattazione della geometria piana negli *Elementi* di Euclide. E tuttavia, vi sono alcune grandi novità, frutto delle crepe nella certezza matematica e della ricerca sui fondamenti. La metodologia assiomatica lascia infatti da parte il collegamento della matematica con la realtà e con la nostra intuizione del reale, presente nelle definizioni basilari di punto, di retta, di numero, e persino in quella di insieme, e si concentra sui rapporti fra questi enti fissati attraverso dei assiomi, che sono alla base delle teorie.

Per costruire una teoria assiomatica si individuano alcuni *concetti primitivi* (per i quali non vi è alcuna definizione) e si accettano senza dimostrazione alcune proposizioni o asserzioni relative a tali concetti note come *assiomi*. La scelta degli assiomi deve rispettare dei vincoli di natura logica oppure di economia o semplicità:

– *coerenza* (che esclude la possibilità che due proposizioni in contraddizione fra di loro possano essere dimostrate sulla base di tali assiomi);
– *completezza* (sulla base di tali assiomi deve essere dimostrato deduttivamente ogni altro risultato della teoria);
– *indipendenza* (nessun assioma deve essere una conseguenza logica degli altri).

I manuali universitari moderni di matematica, infatti, introducono nelle prime pagine gli assiomi di Peano per l'insieme dei numeri naturali oppure un gruppo di assiomi per l'insiemi più ampio dei numeri reali, esprimendo in questo modo che non vi è alcun bisogno, nella matematica superiore, di far leva sulle nostre idee intuitive di numero. Il risultato è un maggior *rigore logico* e un inevitabile *allontanamento dall'intuizione*. Infatti, da una parte non vi è più *l'*aritmetica, *la* geometria e nemmeno *la* logica: cambiando uno o più assiomi si ottengono varie possibili logiche o geometrie, e non vi è un motivo di aderenza all'intuizione che possa rendere una teorie preferibile a un'altra.

L'effetto di questa impostazione sulla geometria è stato dirompente. Da una parte gli assiomi di Euclide sono stati completati con un esame accurato: ad esempio, il matematico tedesco Moritz Pasch osservò che era necessario aggiungere un assioma relativo al concetto di ordinamento dei punti in una retta (ossia l'idea intuitiva di "trovarsi tra due oggetti"). Frutto di questo esame fu un ventaglio di geometrie possibili presentate da David Hilbert (1862-1943) nel suo libro classico *Fondamenti della geometria* (1899). E tuttavia, in questa fioritura la geometria appariva svuotata di contenuto: all'inizio del suo libro, Hilbert scriveva – in modo un po' provocatorio ma efficace – che le parole punto, retta e piano ivi adoperate potevano essere sostituite senza danno con "tavolo", "sedia" e "boccale di birra".

Concludiamo con le considerazioni che svolgono a questo riguardo Courant e Robbins:

> «Del tutto indipendentemente dalle considerazioni filosofiche e dall'interesse per i principi, la via assiomatica è la via naturale per accostarsi a un soggetto matematico in modo da districare l'intrecciarsi delle relazioni fra i vari fatti e rivelare l'impalcatura essenzialmente logica della costruzione. Accade talvolta che questo concentrarsi sulla struttura piuttosto che sul significato intuitivo dei concetti renda più facili le generalizzazioni e le applicazioni che in un procedimento più intuitivo potrebbero essere trascurate. Ma con un procedimento esclusivamente assiomatico è raro che si arrivi a una scoperta significativa o a una visione che getti veramente luce sugli argomenti. Il pensiero costruttivo, guidato dall'intuizione, è la vera fonte dell'evoluzione matematica. Benché la forma assiomatica sia una forma ideale, può essere un errore pericoloso credere che l'assiomatica costituisca l'essenza della matematica. L'intuizione costruttiva dà alla matematica un elemento non deduttivo e irrazionale che la rende paragonabile alla musica o all'arte.»
>
> (Richard Courant, Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica*, p. 278)

Lettura 1
Pitagora

«Pitagora è nato in un periodo culturalmente stimolante. Il sesto secolo a.C. è caratterizzato da importanti, a volte addirittura sensazionali, progressi nei settori più differenti. Si può dire senza esagerazione che questo è il periodo in cui vennero poste le fondamenta nella filosofia della natura, nella letteratura (i primi scritti in prosa), nell'arte e nell'architettura, come anche nella medicina e nella tecnica, della fioritura della cultura greca nell'età di Pericle e oltre. Il punto focale di questi sviluppi fu meno la madrepatria greca che la Ionia nell'Asia Minore, di cui faceva parte anche l'isola natale di Pitagora, Samo. Tra questa regione e le colonie greche in piena espansione nell'Italia meridionale e in Sicilia esisteva un vivace scambio. […]

Almeno l'elite ionica sembra dunque essere stata eccezionalmente aperta, curiosa e cosmopolita. Ciò concorda con il fatto che in questo periodo a Samo vennero realizzati capolavori architettonici e tecnici, che ancora un secolo dopo hanno destato l'incondizionata ammirazione di Erodoto. Essi erano: una galleria scavata nelle mura cittadine per assicurare l'approvvigionamento idrico della città, un gigantesco molo nel porto e "come terzo il tempio più grande di tutti quelli che conosciamo, il cui primo architetto fu Reco, figlio di Filea, una nativo dell'isola" (Erodoto, *Storie*, 3,60). Si dice che un altro architetto di questo tempio fu Teodoro – anch'egli di Samo – il quale trattò anche in un testo specialistico del gigantesco tempio di Era dal duplice peristilio (Vitrubio, *Sull'architettura*). Questo artista eccezionalmente poliedrico e innovativo, che si pensa abbia inventato, tra l'altro, uno strumento per misurare angoli, la livella ad acqua e il tornio, fu nello stesso tempo scultore, tecnico, architetto e – come il padre di Pitagora, secondo una parte della tradizione – tagliatore di gemme. Egli fece per esempio il famoso anello di Policrate, l'enorme cratere d'argento che Creso offrì a Delfi, e – da non dimenticare a causa del suo legame con Pitagora, l'"Apollo Iperboreo" – l'immagine del culto di Apollo Pizio a Samo.

La galleria scavata nel crinale di montagna a nord della città dall'architetto Eupalino di Megera per garantire un approvvigionamento a lungo termine di acqua, viene celebrata ancora ai nostri giorni come una "impresa insuperata di ingegneria". Per abbreviare i tempi di costruzione si prese l'ardita decisione di affrontare la galleria, che misura 1036 metri, da entrambi i lati contemporaneamente. Nel mezzo dei lavori il crescente pericolo che la galleria crollasse e l'afflusso di acqua costrinsero evidentemente a tracciare una nuova linea di condotta, che richiedeva rilevanti capacità di disegno e di calcolo da parte di coloro che erano implicati (la deviazione introno alla zona problematica venne effettuata probabilmente utilizzando un modello planimetrico nella forma di un grande triangolo isoscele". Anche da un punto di vista pratico l'impresa di ingegneria è sorprendente: quasi cinquemila metri cubi di roccia vennero tagliati dalla montagna usando martelli e scalpelli e portati alla luce, altri trecento metri cubi vennero nuovamente trasportati dentro per finire, con la massima cura, le pareti della galleria. Questa struttura viene oggi datata, in base ai ritrovamenti archeologici, intorno al 550 a.C. circa, cioè ancora prima del periodo in cui Policrate prese il potere (circa il 535 a.C.) Così la sua costruzione cade nella tarda giovinezza di Pitagora. È difficilmente pensabile che non fosse familiare a Pitagora questo ardito progetto di ingegneria, che venne certamente progettato a un tavolo da disegno, e che deve aver richiesto anni per essere realizzato.

[Tratto da Christoph Riedweg, *Pitagora*, cap. II "Alla ricerca del Pitagora storico", Vita e Pensiero, Milano, pp. 99-102]

Lettura 2 Enriques sull'assiomatizzazione

«Per approfondire il concetto dei logici matematici conviene precisare le nozioni, già innanzi accennate, intorno all'ordinamento della scienza matematica. Qualunque sia il significato degli enti cui lo studio si riferisce, la scienza procede per dimostrazioni logiche, deducendo successivamente un teorema da un altro che si assume già stabilito. La verifica sperimentale può ben suggerire la scoperta di una verità matematica – come accade per l'area della cicloide tripla del cerchio generatore, che Galileo ha determinato con il peso – ma non fornisce prova accettabile di questa verità, perché lascia sempre il dubbio che la proprietà scoperta sia valida soltanto approssimativamente.

Ora la catena delle deduzioni che fornisce i teoremi deve far capo a principii, che non sono più dedotti similmente da altre proposizioni, ma debbono assumersi come noti a priori. Tali sono gli assiomi e i postulati che, nella tradizione classica, si enunciano sul fondamento di un'evidenza intuitiva. Senonchè la critica contemporanea, approfondendo l'analisi dei principii, è riuscita ad allargare tale concezione: *assiomi** e *postulati* (la distinzione stessa tende a cancellarsi nel pensiero contemporaneo) verranno ritenuti semplicemente come *ipotesi arbitrarie*, atte a reggere l'ordine deduttivo delle proposizioni della teoria, il cui valore dovrà essere saggiato nel suo insieme, anziché da un giudizio portato esclusivamente sulle proposizioni primitive. Di questo arbitrio nella scelta dei principii il matematico ha appreso a valersi per indagare le conseguenze possibili di supposizioni diverse, ovvero per ordinare e sviluppare nella forma più economica le proposizioni di un corpo di dottrina.

In modo affatto analogo, l'assetto logico di una teoria deduttiva esige che i concetti che via via s'introducono vengano successivamente ricondotti ai concetti già noti, mediante *definizioni nominali*: Ché altre definizioni, invero, non ammette la logica rigorosa. Ne consegue che la successione e i concetti di una teoria dovrà far capo a *concetti primitivi*, che – secondo la tradizione classica – venivano spiegati (mediante descrizioni o pseudodefinizioni) con riferimento all'intuizione o visione immaginativa degli enti di un mondo intelligibile. Ma le esigenze della critica contemporanea portano a rifiutare questo appello all'intuizione che – in verità – equivale all'introduzione di postulati non formulati: pertanto i concetti primitivi, che nell'ordinamento logico, voglionsi dichiarare agli inizii della teoria, si assumono senza definizione, ritenendo che sieno *implicitamente definiti* dai rapporti logici espressi nei *postulati*.

Le norme della nuova logica così riassunte, scaturiscono come frutto maturo da una lunga evoluzione delle idee, che ho cercato di spiegare nel mio libro *Per la storia della logica*.»

Tratto da Federico Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura* (1938), pp. 142-143.

* Si tratta delle nozioni comuni del Libro I degli *Elementi*.

Esercizi

1) Stabilisca un confronto fra la matematica pratica (nei vari ambiti culturali in cui si è sviluppata) e la matematica teorica greca tenendo presenti i contenuti, i metodi e gli aspetti sociali.

2) Gli *Elementi* di Euclide: il contesto storico-culturale, i contenuti e l'influsso dell'opera di Euclide.

3) Descrivere i principi di base del discorso matematico negli *Elementi* di Euclide.

4) L'idea greca di dimostrazione.

5) Spieghi il ruolo degli *Elementi* di Euclide nella storia dell'insegnamento della matematica, e in che senso il suo influsso è presente ancora oggi.

6) Spieghi la differenza fra il metodo assiomatico moderno e la presentazione formale degli *Elementi* di Euclide.

7) Il concetto di numero nella matematica greca.

8) Quale è il ruolo avuto da Platone nello sviluppo della matematica?