AM210 2010-2011: I ESONERO

TEMA 1.

Sia X uno spazio metrico, $F \subset X$. Provare che

$$F \text{ é chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad (u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$$

TEMA 2.

Sia K sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$.

Provare che ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito.

TEMA 3.

Sia $A \subset \mathbf{R}^n$. Provare che

(i) A connesso per archi $\quad \Rightarrow \quad A$ connesso.

(ii) $A \subset \mathbf{R}$ é connesso se e solo se A é un intervallo.

TEMA 4.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$. Provare che f é Lipschitziana sui compatti.

Mostrare con un esempio che f puó non essere Lipschitziana in $\mathbf{R}^n$.

TEMA 5. Sia $B_r(x_0)$ palla in $\mathbf{R}^n$.

Sia $f : B_r(x_0) \to \mathbf{R}^m, \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$. Provare che:

(i) f é differenziabile in x_0 se e solo se lo sono le f_i

(ii) se f é differenziabile in x_0 allora f é continua in x_0 e le f_i sono (in x_0) derivabili in tutte le direzioni.

Mostrare con un esempio che una funzione continua puó avere, in un punto, derivate nulle lungo tutte le direzioni senza essere differenziabile in quel punto.

ESERCIZIO 1.

Sia $X = C([0,1], \mathbf{R})$ lo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in $\mathbf{R}$ dotato della norma $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Trovare una successione $f_n \in X$ tale che $\|f_n\|_\infty \leq 1$ che non abbia sottosuccessioni convergenti in X.

ESERCIZIO 2.

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, sia $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Esprimere g_ρ, g_θ mediante f_x, f_y e dedurre che, se f ha simmetria radiale (ovvero $g = g(\rho)$), allora

$$\nabla f(u) = g'(\|u\|)u \quad \text{ove } u = (x,y)$$

ESERCIZIO 3.

Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ tale che $f(x,y) = f(y,x) \quad \forall (x,y)$. Stabilire se é vero che

$$f_x(x,y) = f_y(y,x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{xy}(y,x) \qquad f_{xx}(x,y) = f_{xx}(y,x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

ESERCIZIO 4.

Sia $\quad f(x,y) = xy\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2} \quad$ se $\quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0.$

(i) Stabilire se $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ e, in caso affermativo, calcolare, se esistono

$$[\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial f}{\partial x}](0,0) \quad \text{e} \quad [\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial f}{\partial y}](0,0).$$

(ii) Stabilire se f é di classe $C^2(\mathbf{R}^2)$

ESERCIZIO 5.

Sia $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)} \quad$ se $\quad x^2+y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0.$

É f dotata di massimo e minimo assoluto? Argomentare la risposta.

Se la risposta é affermativa, determinare (eventualmente passando a coordinate polari) massimo e minimo valore di f.