AM210 2010-2011: Appello B

TEMA 1 Sia K sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ dotato della proprietá seguente

$$O_\alpha \subset \mathbf{R}^n \text{ aperti, } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \text{ tali che } K \subset \bigcup_{i=1}^{p} O_{\alpha_i}$$

Provare che $\quad f \in C(K, \mathbf{R}), \quad \Rightarrow \quad f$ é uniformemente continua in K.

TEMA 2 (Formula di Taylor)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Provare che:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \; < \nabla f(u)\,,\, h > \; + \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h > \; + \circ\, (||h||^2)$$

TEMA 3. (Diseguaglianza di Bessel)

Sia $f \in C_{2\pi}$. Siano $\hat{f}_n$ i suoi coefficenti di Fourier. Provare che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

TEMA 4 (Teorema delle contrazioni). Sia

(X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Supposto che

(i) $\quad T(C) \subset C \qquad$ (ii) $\quad \exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \le k d(x,y) \quad \forall\, x, y \in C$

provare che $\qquad \exists!\, x \in C : \qquad Tx = x$

TEMA 5 Siano $a_{ij}, b \in C(\mathbf{R}), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Siano x^i n soluzioni del sistema differenziale lineare omogeneo $\qquad \dot{x} = \mathcal{A}x$.

Sia $\mathcal{X}$ la matrice avente per colonne le x^i, e sia $W(t) := \det \mathcal{X}$. Provare che

x^i é sistema fondamentale $\quad \Leftrightarrow \quad W(t) \neq 0\; \forall t \quad \Leftrightarrow \quad$ esiste t_0 tale che $W(t_0) \neq 0$

Provare poi che l'integrale generale di $\qquad \dot{x} = \mathcal{A}x + b \qquad$ é dato da

$$x(t) \;=\; X \left(c \,+\, \int_0^t X^{-1} b\, d\tau \right) \qquad c \in \mathbf{R}^n$$

ESERCIZIO 1

Sia E spazio di Banach. Si considerino le seguenti affermazioni:

i) ogni aperto in E é unione numerabile di palle aperte

(ii) se O_α sono sottoinsiemi aperti in E, allora esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j O_{\alpha_j}$

(iii) se K é chiuso e limitato in E, allora da ogni ricoprimento aperto di K si puó estrarre un sottoricoprimento finito.

Stabilire se la affermazione (i) é vera in $E = l^\infty$ ed in $E = l^2$.
Stabilire se la affermazione (ii) é vera in $E = l^\infty$ oppure in $E = l^2$.
Stabilire se la affermazione (iii) é vera in $E = l^2$.

ESERCIZIO 2

Sia $\quad f(x,y) = \frac{x^{\frac{11}{3}} \log(x^2y^2) y^{\frac{4}{3}}}{x^6+y^2} \quad$ se $\quad xy \neq 0, \quad f(x,y) = 0$ se $xy = 0$.

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere:

(a) f é continua in $(0,0)$
(b) f é dotata di derivate direzionali in $(0,0)$
(c) f é differenziabile in $(0,0)$

ESERCIZIO 3

Provare che la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1}\, e^{-nx}$ converge in $[0,+\infty)$ e che

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n+1}\, e^{-nx}$$

é continua e integrabile per serie in $[0,+\infty)$. Calcolare infine

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)e^{-nx}}{n+1} \right] dx$$

.