AM210 2010-2011: Appello X

TEMA 1 Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Mostrare come, sotto opportune ipotesi su f, valgano le seguenti formule

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t,x)dx = \int_0^{+\infty} \left[\lim_{t\to+\infty} f(t,x)\right] dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} f(t,x)dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right] dx$$

TEMA 2 Enunciare e dimostrare il Lemma di Schwartz in $\mathbf{R}^2$.

TEMA 3. Sia $f \in C^1_{2\pi}$. Siano $\hat{f}_n$ i suoi coefficenti di Fourier.
Provare che la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f. Dedurre che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

TEMA 4 . Dato un sistema conservativo $\dot{x} = f(x)$, dare una condizione, fornendo argomenti, perché le soluzioni del sistema siano definite per tutti i tempi.
Definire la nozione di sistema Hamiltoniano e provarne il carattere conservativo. Dare una condizione perché tutte le soluzioni di un dato sistema Hamiltoniano siano definite globalmente.
Provare che un campo $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2), f = (a,b)$ é hamiltoniano se e solo se

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial y}$$

TEMA 5 Siano $a_{ij}, b \in C(\mathbf{R})$, $\quad i,j = 1,\ldots,n, \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Siano x^i n soluzioni del sistema differenziale lineare omogeneo $\dot{x} = \mathcal{A}x$.
Sia $\mathcal{X}$ la matrice avente per colonne le x^i, e sia $W(t) := \det \mathcal{X}$. Provare che

$$x^i \text{ é sistema fondamentale} \quad \Leftrightarrow \quad W(t) \neq 0\, \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \text{esiste } t_0 \text{ tale che } W(t_0) \neq 0$$

Provare poi che l'integrale generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x + b$ é dato da

$$x(t) \;=\; X \left(c + \int_0^t X^{-1} b d\tau \right) \qquad c \in \mathbf{R}^n$$

ESERCIZIO 1

Calcolare, se esiste, la derivata in $t = k\pi$ della funzione

$$f(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} e^{-t^2\tau^2} d\tau$$

ESERCIZIO 2 Sia

$$f(x,y) := \frac{1}{y-x}\int_x^y e^{-t^2}\, dt \quad \text{se} \quad x \neq y, \qquad f(x,x) = e^{-x^2}$$

Stabilire se f é continua, parzialmente derivabile, differenziabile.

Determinare, se esistono, punti di minimo o di massimo globali per f.

ESERCIZIO 3 Sia $C(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx^2} \cos x^2 dx,\ \ s \geq 0.$

Stabilire se C é continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$

Provare, effettuando un opportuno cambio di variabile, che

$$\lim_{s\to+\infty} s^{\frac{1}{2}} C(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

ESERCIZIO 4

Sia $f(t,x) = te^{-t^2x^2}$. Stabilire se valgono, in questo caso, le formule

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t,x)dx = \int_0^{+\infty} \left[\lim_{t\to+\infty} f(t,x)\right] dx$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} f(t,x)dx = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right] dx$$

ESERCIZIO 5

Determinare, se esistono, tutte le soluzioni periodiche dell'equazione differenziale

$$x^{(8)} - 4x^{(4)} + 4x = \sin t$$