ST1- 1 ESONERO: 16-4-2010 *(Orlandi)*

Esercizio 1 (14 punti) Siano (X_1, X_2) un campione di lunghezza $n = 2$ estratto da una popolazione con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 1]$.

(1) Mostrare che $\mu = \frac{1}{2}$ é la media della popolazione e $\sigma^2 = \frac{1}{12}$ la varianza.
(2) Verificare che la varianza campionaria é data da $S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$.
(3) Mostrare che $E[S^4] = \frac{1}{60}$.
(4) Sia $\bar{X}$ la media campionaria. Determinare il valore numerico di

$$P[\bar{X} \leq \frac{1}{4}].$$

(5) Determinare il valore numerico di

$$P[S^2 \geq \frac{1}{8}].$$

(6) Determinare la funzione generatrice dei momenti di X_1.
(7) Dimostrare che $\bar{X}$ e S^2 non sono stocasticamente indipendenti.

Esercizio 2 (12 punti) Siano $(X_1, \dots, X_n)$ indipendenti estratti da una popolazione con distribuzione normale di media μ e varianza σ^2.

(1) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di μ supponendo nota la varianza.
(2) Si determini la sua distribuzione campionaria.
(3) É uno stimatore non distorto? (motivare).
(4) Determinare l' errore quadratico medio.
(5) É lo stimatore trovato T_μ una statitistica sufficiente? (Si scriva cosa si intende per statistica sufficiente).
(6) Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n, $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori *semplicemente consistenti* e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.
(7) Si trovi il limite inferiore di Cramer-Rao per lo stimatore trovato.
(8) É lo stimatore un UMVUE?¿

Esercizio 3 (4 punti)

Si consideri la funzione di densitá di una coppia di variabili aleatorie (X, Y),

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Verificare se X e Y sono tra loro dipendenti o indipendenti.