AM5 2010 : I ESONERO

Nel seguito μ indicherá una misura su di un insieme X.

TEMA 1 . Passaggio al limite sotto segno di integrale: enunciare i principali risultati, corredarli eventualmente con controesempi e fornire qualche dimostrazione.

TEMA 2. Dimostrare la completezza di $L^1(\mu)$.

TEMA 3. Sia $C \subset L^2(\mu)$ chiuso e convesso. Provare che

$$\forall f \in L^2,\ \exists f_C \in C : \qquad \int_X (g - f_C)(f - f_C) d\mu \leq 0 \quad \forall g \in C$$

e dedurre che

i) se l é un funzionale lineare e continuo su L^2 allora

$$\exists g \in L^2 : \qquad l(f) = \int_X fg d\mu \quad \forall f \in L^2$$

ii) se $f_n \in C$ converge debolmente a f allora $f \in C$.

TEMA 4. Sia $p \in (1, +\infty)$.

(i) Provare, assumendo L^p separabile, che ogni successione limitata in $L^p(\mu)$ ha estratte debolmente convergenti.

(ii) Mostrare con un controesempio che le successioni limitate in L^1 non hanno in generale estratte debolmente convergenti.

TEMA 5.

Enunciare e dimostrare il Teorema della Media e illustrarne una applicazione.

Esercizio 1. Sia $s \geq 0, A \subset \mathbf{R}^n$. Provare che

$$H^s(A) := \sup_{\delta>0}\left(\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(diam C_j)^s : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}\right)$$

é misura esterna in $\mathbf{R}^n$. Provare poi che, se $0 \leq s < t$, allora

$$H^s(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad H^t(A) = 0 \quad \text{e} \quad H^t(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad H^s(A) = +\infty$$

Esercizio 2. Provare che H^s definita sopra é misura boreliana.

Esercizio 3. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o. \quad \text{e} \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Esercizio 4. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p > 1$. Provare che

$f_n \to 0$ in misura $\Rightarrow$ f_n converge debolmente a zero.

É ancora vero se $p = 1$?

Suggerimento: Fissata $\phi \in L^1 \cap L^q$, *ove* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *usare la diseguaglianza*

$$|\int f_n \phi| \leq ||f_n||_p \left(\int_{\{x:|f_n(x)|\geq\delta\}} |\phi|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

Esercizio 5 . Sia $p \geq 2$. Provare che

i) $\|f_n\|_p, \|g_n\|_p \leq 1, \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\|_p \to_n 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - g_n\|_p \to_n 0$

ii) $f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$

Suggerimento:
i) Provarlo, mediante la diseguaglianza di Hanner, nel caso in cui $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$.
Dedurre poi, eventualmente, il caso generale...
ii) Assumere dapprima $\|f_n\| = \|f\| = 1$ *ed usare i). Dedurre poi, eventualmente, il caso generale...*