AM5 2010: Tracce delle lezioni- 11

Lemma di ricoprimento di Vitali
e
TEOREMA DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Ricoprimento di Vitali. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Sia $\mathcal{V}$ famiglia di **palle chiuse**. $\mathcal{V}$ si dice ricoprimento fino (o di Vitali) di A se

$$\forall x \in A, \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V} \qquad \text{e} \qquad \inf\{r > 0 : B_r(x) \in \mathcal{V}\} = 0$$

ESEMPIO. Sia A aperto. Fissato $r > 0$, l'insieme delle palle chiuse contenute in A e di raggio minore di r é ricoprimento di Vitali di A.

Lemma di Vitali. Sia $A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, Ω aperto di misura finita. Sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di Vitali di A, $\mathcal{V}_\Omega := \{B \in \mathcal{V} : \ B \subset \Omega\}$. Allora

$$\exists B_j \in \mathcal{V}_\Omega : \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j \quad \text{e} \quad L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$$

NOTA ed ESEMPIO. *A non é supposto misurabile!* Sia Ω aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una famiglia numerabile di palle chiuse $B_j \subset \Omega$ disgiunte di raggio minore di δ e tali che $L^N(\Omega \setminus \cup_j B_j) = 0$

Prova. Nel seguito indicheremo con $B_r(x)$ una palla in $\mathcal{V}$ di raggio r e centro x e con $r = r(B)$ il raggio di un generico elemento B di $\mathcal{V}$. Indichiamo $\Omega_1 := \Omega$. Posto

$$\delta_1 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_1, \}, \text{ sia } B_1 \subset \Omega_1 \text{ tale che } \quad r_1 := r(B_1) \geq \frac{\delta_1}{2}$$

Posiamo supporre (se no la dimostrazione é finita) che $\exists x \in A \setminus B_1$ e quindi $\exists\, B(x) \in \mathcal{V}$ tale che $B \subset \Omega_2 := \Omega_1 \setminus B_1$. Posto

$$\delta_2 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_2\} \leq \delta_1 \qquad \text{sia} \qquad B_2 \subset \Omega_2 \quad \text{tale che } r_2 := r(B_2) \geq \frac{\delta_2}{2}$$

Ovviamente $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Possiamo supporre, come sopra, che $\exists\, B \in \mathcal{V}$ tale che $B \subset \Omega_3 := \Omega_2 \setminus B_2$, e, iterando, si trova (salvo terminare la dimostrazione in un numero finito di passi) che

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \exists\, B_n \in \mathcal{V} \ \text{ tale che } \ B_{n+1} \subset \Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus B_n = \Omega_1 \setminus \left(\cup_{j=1}^n B_j\right)$$

$$\text{con} \quad r_{n+1} := r(B_{n+1}) \geq \frac{\delta_{n+1}}{2}, \qquad \delta_{n+1} := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_{n+1}\} \leq \delta_n$$

Notiamo che, siccome le palle B_n sono disgiunte, allora

$$c_N \sum_n r_n^N \;=\; L^N(\cup_n B_n) \;\leq\; L^N(\Omega_1) \;<\; +\infty \quad \Rightarrow \quad r_n \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_n \to_n 0.$$

Ció comporta che ogni palla B deve intersecare qualche B_k, perché

$$B \cap [\cup_{k=1}^n B_k] = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B \subset \Omega_{n+1} \Rightarrow \quad r(B) \leq \delta_{n+1}$$

A sua volta ció comporta che, indicata con $\tilde{B_n}$ la palla concentrica a B_n e di raggio $r(\tilde{B_n}) = 5r_n$, allora

$$(*) \qquad x \in A, \quad x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \quad \Rightarrow \quad \exists k \geq n : \qquad x \in \tilde{B_k}$$

Infatti, $x \in A, \ x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \ \Rightarrow \ \exists B(x) \in \mathcal{V}$, $B(x) \subset \Omega_n = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{n-1} B_j$ con $B(x)$ palla centrata in x di raggio, diciamo, $r(x)$. D'accordo con quanto sopra osservato, esiste un primo indice $k \geq n$ tale che $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$.

Dunque $\qquad B(x) \subset \Omega_k = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j \qquad$ e quindi $\qquad r(x) \leq \delta_k \leq 2r_k$

Siccome $B(x) \cap B_k \neq \emptyset$, concludiamo che $B(x)$ é contenuta nella palla che ha lo stesso centro di B_k e raggio $5r_k$, cioé appunto $\tilde{B_k}$. Da $(*)$ segue che

$A \setminus (\cup_n B_n) \ \subset \ \cup_{k \geq n} \tilde{B_k} \quad \forall n. \qquad$ Ma $\qquad L^N\left(\cup_{k\geq n} \tilde{B_k}\right) \leq c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$

e quindi

$$L^N\left(A \setminus \ (\cup_n B_n)\right) \quad \leq \quad c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$$

NOTA. Il Lemma vale, evidentemente, anche con $\mu \prec\prec L^N$ al posto di L^N. In realtá si puó provare (cosa che qui non faremo) quale che sia μ:

Lemma di Vitali-Besicovitch. Sia μ misura di Borel regolare in $\mathbf{R}^N$. Siano $A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, Ω aperto di misura finita, $\mathcal{V}$ ricoprimento fino di A. Allora

$$\exists B_j \in \mathcal{V}, B_j \subset \Omega \quad \text{due a due disgiunti e tali che} \quad \mu(A \setminus \cup_j B_j) \;=\; 0.$$

Data ora $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$, sia

$$f^\sharp(x) \;:=\; \limsup_{r \to 0} \frac{1}{vol B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy$$

Notiamo che, se $\varphi := \frac{1}{vol B_1} \chi_{B_1}$, $\varphi_r = \frac{1}{r^N}\varphi(\frac{x}{r})$, é $\quad f^\sharp(x) \;=\; \limsup_{r\to 0} (f * \varphi_r)(x)$. In particolare, $f^\sharp$ é misurabile.

Lemma 1. Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$. Se $c > 0$ e $A \subset \{f^\sharp \geq c\}$, allora

$$\int_\Omega f(y)\,dy \;\geq\; c\,L^N(A) \qquad \forall\,\Omega \text{ aperto contenente } A$$

In particolare, $A \subset \{f^\sharp \geq c\}$, A misurabile $\Rightarrow$ $\int\limits_A f \geq cL^N(A)$.

NOTA Di piú, se f é anche continua, dal teorema della media segue che $f^\sharp = f$ ed la conclusione del Lemma non é altro che la diseguaglianza di Chebiceff.

Prova. Sia $A \subset \{x : \quad f^\sharp(x) \geq c\}$, di misura finita. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{1}{vol B_{r_j}(x)} \int\limits_{B_{r_j}(x)} f(y)\,dy \;\geq\; c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad x \in A, \ \frac{1}{vol B_r(x)} \int\limits_{B_r(x)} f(y) \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di A. Fissato Ω aperto, $A \subset \Omega$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$, $B_j \subset \Omega$ palle chiuse disgiunte tali che $L^N\left(A \setminus \cup_j B_j\right) = 0$ e quindi

$$L^N(A) \leq L^N\left(\left(A \setminus \cup_j B_j\right) \cup_j B_j\right) \leq \sum_j vol(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \int\limits_{B_j} f \leq \frac{1}{c-\epsilon} \int\limits_\Omega f \quad \forall \epsilon > 0$$

In particolare, se $\Omega_j := \{|x| < j\}$, $L^N(\{f^\sharp \geq c\} \cap \Omega_j) \leq \frac{1}{c} \int f < +\infty\ \forall\, j$, e quindi $\{f^\sharp \geq c\}$ ha misura finita e quindi il risultato vale per ogni $A \subset \{x : \quad f^\sharp(x) \geq c\}$.

Il Lemma 1 ha la seguente (ovvia ma importante) estensione:

Lemma 2. Sia ν misura di Radon. Allora, per ogni $c > 0$, é vero che

$$A \subset \{x : \limsup_{r \to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \geq c\} \;\Rightarrow\; \nu(A) \geq c\,L^N(A)$$

Prova. Fissato $\epsilon \in (0, c)$,

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{\nu(B_{r_j}(x))}{vol(B_{r_j}(x))} \;\geq\; c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di A. Siano Ω aperto contenente A e $\Omega_n := \{x \in \Omega : \quad \|x\| < n\}$. Sia $A_n := A \cap \Omega_n$. Dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j^n \in \mathcal{V}, B_j^n \subset \Omega_n$ tali che $\quad L^N\left(A_n \setminus \cup_j B_j^n\right) = 0.$ Come sopra,

$$L^N(A_n) \le \sum_j vol(B_j^n) \le \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \nu(B_j^n) \le \frac{1}{c-\epsilon}\, \nu(\Omega_n) \qquad \forall \epsilon > 0$$

e quindi $\quad cL^N(A) = c \lim_n L^N(A_n) \ \le\ \nu(\Omega)$ e la tesi segue dalla regolaritá di ν.

Corollario 1. Sia ν misura di Radon singolare rispetto a L^N. Allora

$$\frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \quad \to_{r\to 0} \ 0 \quad q.o.x$$

Infatti, sia $L^N(Z) = 0 = \nu(Z^c)$. Allora, per ogni $c > 0$, si ha

$$L^N(\{x:\ \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \ge c\} \ = \ L^N(\{x \in Z^c:\ \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \ge c\} \le$$

$$\le \frac{1}{c}\nu(\{x \in Z^c:\ \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \ge c\}) = 0$$

NOTA. Usando Vitali-Besicovitch, si ottengono versioni del Lemma e del Corollario con μ misura di Radon al posto di L^N.

Il Teorema di differenziazione di Lebesgue

Sia $\quad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N).\quad$ Allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \ \to_{r\to 0} 0 \qquad q.o.\ x$$

In particolare, $\quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\, dy \ \to_{r\to 0} f(x) \qquad q.o.\ x$

NOTA. Se f é continua, la conclusione é vera per ogni x:

$$\forall r, \quad \exists \xi(r) \in B_r(x): \quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \ = \ |f(\xi(r)) - f(x)| \to_{r\to 0}\ 0$$

Prova. Possiamo supporre, sostituendo f con $f\,\chi_{B_R}$, che sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$L(x) := \limsup_{r\to 0} \left[\frac{1}{volB_r} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right] \qquad \text{si tratta di provare che}$$

$L^N(\{x : \quad L(x) \geq \alpha\}) = 0 \quad \forall \alpha > 0.$ Fissata $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ si ha

$$L(x) \leq \limsup_{r \to 0} \left[\frac{1}{vol B_r} \int\limits_{B_r(x)} (|f(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)|) \, dy \right] \leq$$

$\leq |f(x) - \varphi(x)| + |f - \varphi|^\sharp(x).$ Fissato $\alpha > 0$ si ha quindi

$$\{x : \quad L(x) \geq \alpha\} \subset \{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x : \quad (f - \varphi)^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

e quindi, per il Lemma 1, $L^N(\{x : \quad L(x) \geq \alpha\}) \leq$

$$\leq L^N(\{x : \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + L^N(\{x : \quad |f - \varphi|^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leq \frac{2}{\alpha} \int\limits_{|f - \varphi| \geq \frac{\alpha}{2}} |f - \varphi| + \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \leq \frac{4}{\alpha} \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \qquad \text{e quindi}$$

$$L^N(\{x : \quad L(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{4}{\alpha} \inf \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| : \quad \varphi \in C_0^\infty \right\} = 0$$

NOTA. Lo stesso risultato vale sostituendo alla misura di Lebesgue una qualsiasi misura di Radon ***(Teorema di Lebesgue-Besicovitch)***.

Corollario 2. Sia μ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$, $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ decomposizione di Lebesgue di μ rispetto alla misura di lebesgue L^N. Allora

$$\frac{d\mu}{dx} := \frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)}$$

esiste L^N-quasi ovunque, é L^N-sommabile e

$$\mu_{ac}(E) = \int_E \frac{d\mu}{dL^N} \, dL^N$$

Infatti, per Radon-Nikodym, esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu_{ac}(E) = \int_E f \, dL^N$. Quindi

$$\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} = \frac{\int_{B_r(x)} f + \mu_s(B_r(x))}{vol(B_r)} \to_r f(x) \quad L^N - q.o. \ x$$

in virtú del Teorema di differenziazione di Lebesgue e del Corollario 1.

NOTA. Il Corollario 2 vale anche con ν misura di Radon al posto della misura di Lebesgue.

Derivabilitá quasi ovunque e Teorema Fondamentale del Calcolo.

Il primo importante risultato di questa sezione é la derivabilitá quasi ovunque delle funzioni monotone (in $\mathbf{R}$). Cominciamo con una importante classe di funzioni, le *funzioni integrali*.

Proposizione 1. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, $F(x) := \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Allora

$$\text{F é derivabile q.o. e} \qquad \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \;=\; f(x) \;\; q.o. \; x$$

$$\text{e quindi} \qquad F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} F'(t)dt \quad \text{e} \quad F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} F'(x)dx \quad \forall a, b$$

Prova. Applicando L-B, otteniamo quasi per ogni x,

$$|\frac{1}{r}\int\limits_{x}^{x+r} f(t)\,dt \;-\; f(x)| \;=\; |\frac{1}{r}\int\limits_{x}^{x+r} f(t)\,dt \;-\; \frac{1}{r}\int\limits_{x}^{x+r} f(x)\,dt| \le$$

$$\le \frac{2}{2|r|}\int_{x-|r|}^{x+|r|} |f(t) - f(x)|\,dt \to_{r\to 0}$$

La seconda affermazione segue dalla prima: $F'(x) = f(x)$ q.o.

Dunque, innanzi tutto, ogni funzione integrale é derivabile quasi ovunque. É peró chiaro che ci sono funzioni derivabili q.o. che non sono funzioni integrali. Ad esempio $\chi_{[0,+\infty)}$(infatti, come vedremo, le funzioni integrali sono continue , infatti *assolutamente continue*). É allora naturale chiedersi

Problema 1.

Quali ipotesi garantiscono che una funzione é derivabile quasi ovunque?

Un'altra proprietá delle funzioni integrali é quella di lasciarsi ricostruire a partire dalla loro derivata (piú precisamente, per ogni funzione integrale l'oscillazione tra due punti $a < b$ é uguale all'integrale della sua derivata calcolato tra a e b): *per le funzioni integrali vale il Teorema Fondamentale del Calcolo*

$$F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} F'(x)dx$$

É peró evidentemente falso che ogni funzione derivabile q.o. si possa scrivere come integrale della sua derivata (q.o.), se non altro perché la derivata potrebbe non essere integrabile, come nel caso della funzione $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Ma puó ovviamente accadere che una f abbia derivata quasi ovunque, per di piú integrabile, senza per questo coincidere con l'integrale della sua derivata. Ad esempio, la funzione di Heavyside, $\chi_{[0,+\infty)}$, ha derivata nulla in ogni $x \neq 0$, ma, non essendo costante, la sua oscillazione non é zero e non é quindi l'integrale della sua derivata. Un esempio ancora piú drammatico é dato dalla *funzione di Cantor*, che é monotona, continua, derivabile q.o. (ovunque fuori dell'insieme di Cantor) con derivata nulla quasi ovunque, ma, non essendo costante, la sua oscillazione non é zero e non é quindi l'integrale della sua derivata.

Problema 2.

Caratterizzare le funzioni F derivabili q.o. e con derivata (localmente) sommabile tali che

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \qquad \forall x, a$$

Nel tentativo di caratterizzare le funzioni che si possono scrivere come funzioni integrali, per le quali vale quindi il TFC, deriviamo innanzi tutto una semplice condizione necessaria.

Funzioni Assolutamente Continue (AC). Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
Dati $I_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, p$, $I_i \cap I_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, scriveremo

$$\omega[F, \{a_j, b_j\}] := \sum_{j=1}^{p} |F(b_j) - F(a_j)|$$

F si dice AC in $[a, b]$ se $\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$:

$$\sum_{j=1}^{p}(b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow \ \omega[F, \{a_j, b_j\}] \leq \epsilon$$

Proposizione (le funzioni integrali sono AC). Sia $f \in L^1([a, b])$, $x_0 \in (a, b)$. Allora

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \qquad \text{é AC in } [a, b]$$

Infatti $\omega[F, \{a_j, b_j\}] = \sum_{j=1}^{p} |\int_{a_j}^{b_j} f| \leq \int_{\cup_{j=1}^{p}[a_j,b_j]} |f|$ e l'AC segue dalla assoluta continuitá dell'integrale.

Vediamo adesso una classe di funzioni che, al pari delle funzioni integrali, sono derivabili q.o. ma che non sono in generale AC.

Funzione distribuzione di una misura di Radon in R.

Se μ é misura di Radon in **R**, tale che $\mu((-\infty, x)) < +\infty \ \forall x$, resta definita la **funzione distribuzione di** μ :

$$F_\mu(x) \ := \ \mu((-\infty, x)) \ = \int\limits_{-\infty}^{x} d\mu$$

ESEMPI.

Se μ é *assolutamente continua*, per Radon-Nikodym esiste una $f \geq 0$ Lebesgue integrabile, tale che $\mu(E) := \int\limits_E f dx$ ed allora $F_\mu(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f dx$ non é altro che la funzione integrale di f, e quindi F_μ **é derivabile quasi ovunque** con $\frac{d}{dx}\mu((-\infty, x)) = f(x)$ quasi ovunque e quindi anche

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt}\mu((-\infty, t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} F'_\mu(t)dt$$

cioé per $F_\mu(x)$ vale il TFC.

Se μ é *singolare*, allora $\mu((-\infty, x)$ **é derivabile quasi ovunque** con derivata quasi ovunque nulla. Ció segue dal Corollario 1:

$$| \ \frac{1}{t}[\mu_s((-\infty, x+t)) - \mu_s((-\infty, x))] \ | \ \leq \ 2 \ \frac{\mu_s \, (\, [\, x - |t|, x + |t| \,] \,)}{2|t|} \ \to_{t \to 0} 0$$

Combinando quanto sopra, troviamo che

Proposizione. $\quad F_\mu$ *é derivabile L^1-quasi ovunque e* $\quad \frac{dF_\mu}{dx}(x) = \frac{d\mu}{dx}$ *q.o.x.*

Infatti, dal Corollario 2:

$$\mu(E) = \int\limits_E \frac{d\mu}{dx} dx + \mu_s(E) \qquad \forall E \ \text{boreliano, e quindi} \qquad F_\mu(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{d\mu}{dt} dt + \mu_s((-\infty, x))$$

Per quanto visto, $\mu_s((-\infty, x))$ ha derivata nulla q.o.. Si puó scrivere:

$$F_\mu(x) \ = \int\limits_{-\infty}^{x} F'_\mu(t) \, dt \ + \ \mu_s((-\infty, x))$$

Proposizione . F_μ é (AC) se e solo se μ é assolutamente continua.

Prova. Se μ é assolutamente continua, ovvero $\mu_s = 0$ si ha $F_\mu(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{d\mu}{dt}\, dt$ e quindi F_μ é AC. Viceversa, sia F_μ assolutamente continua. Allora

$$A \subset \cup_j \, (a_j, b_j), \ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \le \delta \ \Rightarrow \ \mu(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j))$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} [\, \mu((-\infty, b_j) \ - \ \mu((-\infty, a_j)\,] \ \le \ \sum_{j=1}^{\infty} [\, F(b_j) - F(a_j)\,] \le \epsilon$$

Dunque $L^1(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A) = 0$.

Problema 1 bis.

Quali funzioni sono distribuzioni di misure? (e quindi derivabili q.o.)

Condizioni necessarie perché una F sia funzione distribuzione di una misura é che

i) F sia **non decrescente** e $F(-\infty) = 0$

ii) F sia **continua a sinistra** in ogni punto

Infatti
$x < b \Rightarrow F(b) - F(x) = \mu((-\infty, b)) - \mu((-\infty, x)) = \mu([x, b)) \to_{x \to b^-} \mu(\emptyset) = 0$
$x > b \Rightarrow F(x) - F(b) = \mu((-\infty, x)) - \mu((-\infty, b)) = \mu([b, x)) \to_{x \to b^+} \mu(\{b\})$
In particolare, una F_μ é continua in b se e solo se $\mu(\{b\}) = 0$.

Proposizione. *F é funzione distribuzione se e solo se F é non decrescente, continua a sinistra in ogni punto e* $\inf\limits_{\mathbf{R}} F = 0$.

Si tratta di costruire una misura di Borel μ_F tale che $F(x) := \mu_F((-\infty, x)) \ \forall x$
Sia

$$\mu_F(A) := \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} \ [\, F(b_j) - F(a_j)\,] : \quad A \subset \cup_j \ [\, a_j, \ b_j \,) \, \}.$$

É facile vedere che μ_F é misura metrica e quindi Boreliana ed infatti di Radon (μ si chiama misura di Lebesgue-Stieltijes generata da F). Inoltre , chiaramente, $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$ e quindi $\mu((-\infty, x)) = F(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$

ESEMPIO. Sia $F(x) = \chi_{[0, +\infty)}$. É $F(x) = \delta_0((-\infty, x))$.

Corollario: le funzioni monotone (o differenze di funzioni monotone) sono derivabili q.o. con derivata localmente sommabile.

Discutiamo ora il Problema 2. La formula di Torricelli-Newton per F monotona (con $F(-\infty) = 0$) dice che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mu_F)_s = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_F \text{ é assolutamente continua.}$$

Dunque, nella classe delle funzioni monotone la validitá di (TN) equivale alla assoluta continuitá.

Definizione di funzioni BV (funzioni a variazione limitata)

$$F \text{ é BV in } [a,b] \qquad \text{se} \qquad V_a^b(F) := \sup\{\omega[F, \{a_j, b_j\}] \ : \ (a_j, b_j) \subset [a,b]\} < +\infty$$

Esempio. Le funzioni monotone limitate, la differenza di funzioni monotone limitate.

Lemma. Sia F funzione BV in $[a,b]$. Allora

(i) $V_a^x(F)$ é non decrescente e $x < y \ \Rightarrow \ V_a^y(F) = V_a^x(F) + V_x^y(F)$

(ii) $G(x) := V_a^x(F) - F(x)$ é non decrescente

(iii) F é AC in $[a,b] \ \Rightarrow \ F$ é BV in $[a,b]$ e $V_a^x(F)$ é AC.

La (i) si verifica facilmente. La (ii) segue da $x < y \ \Rightarrow \ F(y) - F(x) \leq V_x^y(F)$. (iii): F é AC $\Rightarrow \ \exists \delta : \ V_x^{x+\delta}(F) \leq 1 \ \forall x \in [a, b-\delta]$. Ció implica che F é BV.

Proposizione. *Se F é BV in $[a,b]$, allora F é derivabile q.o. in $[a,b]$.*

Inoltre, vale (T-N), cioé $\quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \quad$ *se e solo se* $\quad F$ *é AC*

Estendiamo F : $F(x) = F(a) \ \forall x \leq a, \ F(x) = F(b) \ \forall x \geq b$. Dal Lemma segue che $F = V_a^x(F) - [V_a^x(F) - F]$ é differenza di due funzioni monotone limitate e quindi é derivabile q.o. Se poi F é AC, allora $F = F_1 - F_2$ con F_i nondecrescenti e AC: (T-N) vale per le F_i e quindi vale anche per F.