Esecitazione AM3 n.6-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Moltiplicatori di Lagrange

(1) Sia

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x+y+z^2 & \text{se } x>0 \\ f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 & \text{se } x\le 0. \end{cases}$$

Sia $D = D:+\cup D_-$ dove

$$D_\pm = \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ \ \pm x\ge 0\,\}.$$

Allora:

(a) calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_1(x,y,z)$ in D_+.

(b) calcolare il massimo/minimo assoluto di $f_2(x,y,z)$ in D_-.

(c) dai due punti precedenti, dedurre il valore dell'estremo superiore/inferiore di f in D. Stabilire inoltre se tale valore rappresenta il massimo/minimo assoluto di f in D indicando i punti in cui venisse eventualmente assunto.

(2) Sia $f(x,y) = x^2 - x\,y^2$ e $E := \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\le y\le x\,\}$. f ammette massimo, minimo o estremo inferiore o superiore in E e in $\mathbb{R}^2$?

(3) Sia $A = \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\,y+\frac{1}{2}\,\sin(x\,y)>\pi\,\}$ e $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Allora

(a) discutere se l'insieme A é compatto oppure no;

(b) calcolare, qualora esista, $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)$;

(c) determinare estremo inferiore/superiore di $f(x,y)$ in A ed eventuali punti di minimo/massimo assoluto. (Suggerimento:la funzione $g(t) = t+\frac{1}{2}\sin t$ é monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e $g(\pi)=\pi$.)

(4) Dati $a,b,c>0$ trovare un parallelepipedo di volume massimo e spigoli paralleli agli assi coordinati inscritto nel paraboloide

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}.$$

Soluzioni

(1) (a) Consideriamo la funzione $f_1(x,y,z) = x+y+z^2$ su D_+. Poiché $\nabla f_1(x,y,z) = (1,1,2\,z)\ne(0,0,0)$, abbiamo che la funzione f_1 non ammette punti critici liberi all'interno di D_+. La frontiera D_+ si spezza in due componenti:

$$\{\,x^2+y^2+z^2=1\,\}\cup\{\,x>0\,\},\quad \{\,(0,y,z)\,:\,y^2+z^2\le 1\,\}.$$

Per quanto riguarda il primo insieme, studiamo i punti critici vincolati di f_1 sulla sfera unitaria prendendo poi in considerazione solo quelli con prima coordianata positiva. Dobbiamo quindi studiare:

$$\begin{cases} 1 = \lambda\, x, \\ 1 = \lambda\, y, \\ z(2-\lambda) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Dalla terza equazione otteniamo che: $z = 0$ e quindi $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, oppure $\lambda = 2$, $x = y = \frac{1}{2}$ e quindi $z = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$. Prendendo in considerazione i punti con prima coordinata positiva, otteniamo i seguenti punti critici vincolati: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $Q_\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$, su cui la funzione f_1 assume i valori: $f_1(P) = \sqrt{2} < f_1(Q_\pm) = \frac{3}{2}$. Per quanto riguarda il secondo insieme che compone la frontiera di D_+, consideriamo la restrizione di f_1 su $\{\, x = 0 \,\}$: $g(x, y) = y + z^2$. Studiamo poi la funzione $g(x, y)$ nel disco 2−dimensionale $\{\, y^2 + z^2 = 1 \,\}$. Il sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda\, y, \\ z(2-\lambda) = 0, \\ y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

produce quattro soluzioni $M_\pm = (0, \pm, 0)$, $T_\pm = (0, \frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Poiché $f_1(M_\pm) = \pm 1$, $f_1(T_\pm) = \frac{5}{4}$, otteniamo che: $\max_{D_+} f_1 = f_1(Q_\pm) = \frac{3}{2}$, $\min_{D_+} f_1 = f_1(M_-) = -1$.

(b) La funzione $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ rappresenta il quadrato della distanza dall'origine. Quindi $0 \leq f_2 \leq 1$ sul disco 3−dimensionale $D_+ \cup D_+$ e $f_2 \leq 1$ sulla sfera $\{\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$. Quindi: $\max_{D_-} f_2 = 1$, $\min_{D_-} f_2 = 0$.

(c) Poiché $f_1 \geq -1$ in D_-, abbiamo che $f \geq -1$ su $D_+ \cup D_-$. Lungo la successione $M_t = (t, -1, 0)$, $t \to 0^+$, abbiamo che $f(M_t) = f_1(M_t) \to f_1(M_-) = -1$. Quindi $\inf_{D_+ \cup D_-} f = -1$ e l'estremo inferiore non viene mai raggiunto. Invece il massimo assoluto risulta essere in $Q_\pm$: $\max_{D_+ \cup D_-} f = f(Q_\pm) = \frac{3}{2}$.

(2) Basta osservare che $(n, 0)$, $(n, n) \in E$, $f(n, 0) = n^2 \to +\infty$ e $f(n, n) = n^2 - n^3 \to -\infty$ per $n \to +\infty$, otteniamo che

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f - \infty, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty = \sup_E f.$$

(3) (a) L'insieme A non é chiuso e neanche limitato, infatti, la successione $(2\,\pi\, n, \frac{1}{n}) \in A$ é limitata.

(b) Chiaramente $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = 0$

(c) Poiché $f > 0$ in $\mathbb{R}^2$, dal punto precedente otteniamo $\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$ che non viene mai raggiunto. Sempre dal punto precedente segue che la funzione $f(x,y)$ raggiunge massimo in $\bar{A}$. Determiniamo ora il punto di massimo assoluto di f in $\bar{A}$. Studiamo i punti critici liberi:

$$\nabla f(x,y) = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}(x,y) = (0,0) \quad \text{se e solo se} \quad x = y = 0.$$

Non essendo l'origine un punto di A, tale punto deve essere scartato. Studiamo i punti critici vincolati:

$$\nabla f(x,y) = \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}(x,y) = \lambda\,(1 + \frac{1}{2}\,\cos(xy))(y,x).$$

Quindi

$$\begin{cases} \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}\, x = \lambda\,(1 + \frac{1}{2}\,\cos(xy))\, y \\ \frac{-2}{(x^2+y^2)^2}\, y = \lambda\,(1 + \frac{1}{2}\,\cos(xy))\, x \end{cases}$$

riassorbiamo i fattori $\frac{-2}{(x^2+y^2)^2}$, $(1+\frac{1}{2}\,\cos(xy))$ nel moltiplicatore λ, ponendo $\beta = (1 + \frac{1}{2}\,\cos(x\,y))\frac{-2}{(x^2+y^2)^2}$. Dobbiamo quindi studiare il sistema:

$$\begin{cases} x = \beta y \\ y = \beta x, \end{cases}$$

$(x,y) \in \partial A$. Poiché $(0,0) \notin \partial A$, β, x, $y \neq 0$. Allora $x^2 = \beta\, x$, $y = y^2$ e $x = \pm y$. Essendo $(x,-x) \notin \partial A$ osserviamo che i punti critici vincolati P_0 sono della forma (x_0,x_0), dove x_0 deve soddisfare $g(x_0^2) = x_0^2 + \frac{1}{2}\,\sin(x_0^2) = \pi$ in modo tle che $P_0 \in \partial A$. Dal suggerimento, l'unica soluzione é $x_0^2 = \pi$. Quindi $P_0 = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ é l'unico punto critico vincolato di $f(x,y)$ su ∂A. Abbiamo allora $\max_{\bar{A}} f = f(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) = \frac{1}{\pi}$. Siccome $f < \frac{1}{2\,\pi}$ in A e $f(\sqrt{\pi}+\frac{1}{n},\sqrt{\pi}) \to \frac{1}{2\,\pi}$ per $n \to +\infty$, dove $P_n = (\sqrt{\pi}+\frac{1}{n},\sqrt{\pi}) \in A$, otteniamo che $\sup_A f = \frac{1}{2\,\pi}$ e non é mai raggiunto in A.