Esecitazione AM3 n11-12.-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Formule di Gauss-Green e di Stokes

Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ curva semplice e chiusa, il cui sostegno é frontiera di un insieme E. Se $\omega = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y$ é una forma differenziale di classe C^1 si ha

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \int_E \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)\, d\,x\,\mathrm{d}\,y. \tag{1}$$

Tale formula prende il nome di Formula di Gauss-Green.

In particolare sia $V = (V_1, V_2)$ in $\mathbb{R}^2$ un campo vettoriale, si ha $\operatorname{div} V = \frac{V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}$, posto $M = V_1$ e $N = V_2$ abbiamo il seguente Teorema della Divergenza

$$\int_E \operatorname{div} V \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_{\partial E} (V_1\,\nu_1 + V_2\,\nu_2)\mathrm{d}\,s = \int_{\partial E} (V,\, \nu)\mathrm{d}\,s,$$

l'integrale su E della divergenza di un campo vettoriale V é uguale al flusso di V attraverso ∂E.

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é semplicemente connesso, ogni forma chiusa definita in A é esatta.

Sia $V(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$. Indichiamo con $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ e sia $\operatorname{rot} V = \nabla \wedge V$ prodotto vettoriale.

Sia S una superficie di classe C^2. Si ha allora

$$\int_S (\operatorname{rot} V, \nu)\mathrm{d}\,\sigma = \int_{\partial^+ S} X\,\mathrm{d}\,x + Y\,\mathrm{d}\,y + Z\;\;z = \int_{\partial^+ S} (V, \tau)\mathrm{d}\,s$$

dove

$$\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\,\varphi_u \wedge \varphi_v\,\|}$$

é il versore normale a S e τ il versore tangente alla curva $\partial^+ S$. Tale formula rappresenta il Teorema di Stokes.

Se $A \subset \mathbb{R}^3$ é semplicemente connesso, ogni forma chiusa definita in A é esatta. In altri termini, in un aperto semplicemente connesso ogni campo irrotazionale é conservativo.

- Una prima applicazione della formula di Gauss-Green é il calcolo dell'area di una figura piana. Sia $M = 0$ e $N = x$ si ottiene
$$\int_{\partial^+ E} x \mathrm{d}\, y = \int_E \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d} y = m(E).$$
Sia $M = y$ e $N = 0$ si ottiene
$$\int_{\partial^+ E} y \mathrm{d}\, x = -\int_E \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d} y = -m(E).$$
Sia $M = -\frac{y}{2}$ e $N = \frac{x}{2}$ si ottiene
$$\frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} x \mathrm{d}\, y - y \mathrm{d}\, x = \int_E \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d} y = m(E).$$

- Calcolare l'area racchiusa dalla cicloide, di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$
$0 \leq t \leq 2\,\pi$ e dall'asse delle x.

Soluzione: Osserviamo che $\gamma'(t) = (-\cos t, \sin t)$. Abbiamo che
$$m(E) = \int_{\partial^+ E} x \mathrm{d} y = -\int_0^{2\,\pi} (t - \sin t)\, \sin t \mathrm{d}\, t = \int_0^{2\,\pi} \sin^2 t \mathrm{d} t - \int_0^{2\pi} t\, \sin t \mathrm{d}\, t = \pi + 2\pi = 3\,\pi.$$

- Sia ω la forma $1-$forma
$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\, x + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}\, y.$$
(1) Verificare che ω é chiusa;
(2) Usando la chiusura calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ é l'ellisse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ percorso in verso positivo.

Soluzione:
Sia φ la circonferenza orientata unitaria orientata positivamente, risulta $\int_\varphi \omega = 2\,\pi$.
$$A = \Big\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \Big\} \setminus \Big\{ x^2 + y^2 \leq 1 \Big\}$$
tale che $\partial^+ A = \gamma - \varphi$. Applicando Gauss-Green
$$\int_\gamma \omega - \int_\varphi \omega = \int_{\partial^+ A} \omega = \int_A \Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2 + y^2} \Big) \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y = 0$$

per la chiusura di ω

$$\int_\gamma \omega = \int_\varphi \omega = 2\,\pi.$$

- Siano

$$\omega_1 = y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y$$
$$\omega_2 = y\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,y + (y+z)\,\mathrm{d}\,z,$$

$1-$forme in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ rispettivamente. Sia $S = \{\,(x,y,z)\,:\, 0 < z = 1-x^2-y^2\,\}$ una porzione di paraboloide.
Allora
(1) verificare se ω_1 e ω_2 sono esatte. Eventualmente calcolare il potenziale associato.
(2) Calcolare $\int_{\partial^+ S} \omega_2$.
(3) Verificare la validitá del Teorema di Stokes per il campo vettoriale $V = (y, x, y+z)$ sulla superficie S.

Soluzione:
(1) Risulta $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x}$, pertanto ω_1 é chiusa e quindi esatta. Si calcola facilmente il potenziale $f(x,y) = x\,y$.
Risulta $\frac{\partial x}{\partial z} = 0 \neq 1 = \frac{\partial (y+z)}{\partial y}$, pertanto ω_2 non é chiusa e neanche esatta.
(2) $\partial^+ S$ é il cerchio unitario, C nel piano $\{\,z = 0\,\}$ si vede facilmente che $\int_{\partial^+ S} \omega_2 = \int_C \omega_1 = 0$ perché ω_1 é esatta.
(3) Calcoliamo $\mathrm{rot}\, V = (1,0,0)$, e sia φ la parametrizzazione di S

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \tag{2}$$

con $(x,y) \in D$ disco unitario $1-$dimensionale. Poiché $\varphi_x = (1, 0, -2\,x)$, $\varphi_y = (0, 1, -2\,y)$, risulta $\varphi_x \wedge \varphi_y = (2\,x, 2\,y, 1)$, $\nu = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\,\varphi_x \wedge \varphi_y\,\|}$, $d\,\sigma = \|\,\varphi_x \wedge \varphi_y\,\|$. In coordinate abbiamo

$$\int_S (\mathrm{rot}\, V, \nu)\; d\,\sigma = \int_D \mathrm{rot}\, V \cdot (2\,x, 2\,y, 1)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_D 2\,x \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_S (V, \nu)\mathrm{d}\,\sigma = 2\Big(\int_0^{2\,\pi} \cos\theta\Big)\Big(\int_0^1 \rho^2 \mathrm{d}\,\rho\Big) = 0.$$