Esecitazione AM3 n.2-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Teorema del punto fisso. Convergenza negli spazi l^p.

(1) Dato il funzionale su $C([0;1];\mathbb{R})$:

$$u(x) \;\to\; \varphi(u)(x) = 1 + \int_0^1 e^{-x\,y}\, y\, u(y)\mathrm{d}y$$

determinare se e quali punti fssi ammette.

(2) Sia φ il seguente funzionale su $C([0;1];\mathbb{R})$

$$u(x) \;\to\; \varphi(u)(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Provare che φ é una contrazione su $C([0;1];\mathbb{R})$ e determinare il punto fisso di φ.

(3) Sia B_a la palla chiusa di raggio $a > 0$ in l^2:

$$B_a := \Big\{ x \in l^2 \;:\; \|x\|_2^2 = \sum_{n^0}^{\infty} x_n^2 \leq a^2 \Big\}.$$

Dati $b, c > 0$ e $y \in B_b$, consideriamo il seguente funzionale su B_a:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_a \to \varphi(x) = (c\sqrt{|x_n y_n|})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Allora:
(a) verificare che φ é a valori in l^2;
(b) determinare per quali valori di c lo spazio di arrivo é B_a;
(c) determinare quanti e quali punti fissi ammette il funzionale φ;
(d) determinare per quali valori di c il funzionale φ é una contrazione.

(4) Sia data la seguente successione $x_n \in l^2$, $n \geq 1$ definita nel seguente modo:

$$x_n^{(k)} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

(a) Calcolare la $\|x_n\|_{l^2}^2$.
(b) Discutere la convergenza eventuale in l^1 e/o in l^2 della successione x_n per $n \to +\infty$.

Soluzioni:

(1) Date $u, v \in C([0;1];\mathbb{R})$, si ha che

$$\begin{aligned} |\varphi(u)(x) - \varphi(v)(x)| &\leq \int_0^1 |e^{-x\,y}\,y\,|\,|u(y) - v(y)|\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 e^{-x\,y}\,y\,|u(y) - v(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \|u - v\|_\infty \int_0^1 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Quindi φ é una mappa da $C([0;1];\mathbb{R})$ in se che é una contrazione. Ammette quindi un unico punto fisso.

(2) Date $u, v \in C([0,1],\mathbb{R})$, si ha che

$$\begin{aligned} |\varphi(u)(x) - \varphi(v)(x)| &\leq \frac{1}{2}\int_0^x |u(y) - v(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |u(y) - v(y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{2}\|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Quindi φ é una contrazione di $C([0,1],\mathbb{R})$ in se, pertanto ammette un unico punto fisso. L'unico punto fisso u di φ $\varphi(u) = u$ soddisfa

$$u(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x u(t)\mathrm{d}t.$$

Equivalentemente, dal Teorema fondamentale del calcolo integrale $u \in C([0,1],\mathbb{R})$ e per derivazione, vale

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{2}u(x) \ \text{ in } \ (0,1) \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Quindi $u(x) = e^{\frac{x}{2}}$ é l'unico punto fisso di φ.

(3) Dato $x \in B_a$, dalla disuguaglianza di Minkowski segue che

$$\|\varphi(x)\|_{l^2}^2 = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \;\; |y_n| \leq c^2\,\|x\|_{l^2}\;\|y\|_{l^2} \leq a\,b\,c^2 < \infty$$

poiché $y \in B_b$ e $x \in B_a$. Quindi φ prende valori in l^2 e, se $c \leq \sqrt{\frac{a}{b}}$, prende valori in B_a. Un punto fisso $x \in B_a$ deve soddisfare per ogni $n \in \mathbb{N}$: $c\sqrt{|x_n\,y_n|} = x_n$.

Quindi $x_n = 0$ oppure $x_n = c^2\,|y_n|$. Dato $J \subset \mathbb{N}$, l'elemento

(1) $$x = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ c^2\,|y_n| & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus J \end{cases}$$

é quindi un punto fisso di φ. Al variare di $J \subset \mathbb{N}$, se $y \neq 0$, la mappa φ ammette almeno due punti fissi. Quindi, per ogni $c < \sqrt{\frac{a}{b}}$ la mappa φ non puó essere una contrazione da B_a in se.

(4) (a) Abbiamo che:
$$\|x_n\|_{l^2}^2 = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$
dove abbiamo usato lo sviluppo
$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0}\frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{per} \quad 0 < x = \frac{1}{n+1} < 1.$$

(b) Dal primo punto $\|x_n\|_{l^2} \to 0$ per $n \to +\infty$. Quindi $x_n \to 0$ in l^2. Inoltre,
$$\|x_n\|_{l^1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \to 0$$
per $n \to +\infty$. Abbiamo mostrato che $x_n \to 0$ se $n \to +\infty$ anche l^1.