Esecitazione AM3 n.1-A.A. 2009-2010

Esercitatore: Maristella Petralla

Spazi metrici e normati, distanze e norme equivalenti

- Sia X un insieme, si dice *distanza o metrica* in X una funzione d che ad ogni coppia di punti x, y di X associa un numero $d(x, y)$ distanza tra x e y con le seguenti proprietá:
  (1) $d(x, y) \geq 0$; $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$,
  (2) $d(x, y) = d(y, x)$,
  (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
  La coppia (X, d) si chiama *spazio metrico.*
  Tramite la distanza in uno spazio metrico si possono definire gli intorni di raggio $r > 0$ e centro x_0:
  $I_r(x_0) := \{ x \in X \, : \, d(x, x_0) < r \}$.

- Lo spazio $\mathbb{R}^N$ si dirá spazio metrico sottintendendo che la distanza é quella euclidea:
  $$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}$$
  $x = (x_1, \ldots, x_N)$ e $y = (y_1, \ldots, x_N)$.

ESEMPIO: Sia $C([a, b])$ lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$, é uno spazio metrico, con la distanza
$$d(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$
Si vede subito che le prime due proprietá della distanza sono verificate, per dimostrare la terza consideriamo tre funzioni f, g, h nello spazio. Si ha per ogni $t \in [a, b]$:
$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$
e la proprietá segue prendendo l'estremo superiore al variare di t in $[a, b]$. Questa distanza si chiama *metrica della convergenza uniforme.* Una successione $f_n \in C([a, b])$ converge uniformemente ad una funzione f se e solo se la successione di numeri reali $d(f_n, f)$ converge a zero.

- Due metriche d_1 e d_2 su X sono *metriche equivalenti* se esistono due costanti positive α e β t. c. $\forall x, y \in X$:
  $$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

ESEMPIO: In $\mathbb{R}^N$ si possono introdurre metriche diverse da quella euclidea, come ad esempio

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_N - y_N|$$
$$d_2(x,y) = \max\{\, |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_N - y_N| \,\}.$$

Gli spazi metrici $(\mathbb{R}^N, d_1)$ e $(\mathbb{R}^N, d_2)$ sono distiniti e diversi da $\mathbb{R}^N$ con la metrica standard. Essi sono peró tutti equivalenti, infatti

$$\frac{1}{N} d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq N d_2(x,y).$$

ESEMPIO: Sia $C([a,b])$ lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$, é uno spazio metrico assumendo come distanza tra f e g

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t,$$

la dimostrazione é analoga a quella della metrica uniforme.
Si puó introdurre anche la seguente metrica

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b \Big(f(t) - g(t) \Big)^2 \mathrm{d}t}.$$

Si dimostra che $(C([a,b]), d_2)$ é uno spazio metrico. Le prime due proprietá sono ovvie. Per la terza proprietá procediamo come segue. Consideriamo la funzione positiva del parametro reale λ :

$$0 \leq R(\lambda) = \int_a^b (\lambda\, f(t) + g(t))^2 \mathrm{d}t = \lambda^2 \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t + 2\,\lambda \int_a^b f(t)\, g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t.$$

La funzione $R(\lambda)$ é un trinomio in λ ed ha radici complesse coniugate e discriminante negativo:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(f(t) - g(t) \Big)^2 \mathrm{d}t \ &= \ \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t + 2 \int_a^b f(t)\, g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \ \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t + 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t} + \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Dalla sostituzione $f(t) \to f(t) - g(t)$ e $g(t) \to g(t) - h(t)$ segue la tesi.

ESEMPIO: Definiamo lo spazio delle successioni $x = \{x_n\}$ di numeri tali che $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ con $p \geq 1$. Questo spazio si indica con l^p e diventa uno spazio metrico definendo la distanza $d(x,y) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$. Per dimostrare che l^p con questa distanza é uno spazio metrico basta utilizzare le seguenti disuguaglianze:

per $x \in l^p$ e $y \in l^q$ con $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, vale la disuguaglianza di Schwartz-Holder

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n\, y_n| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \Big)^{\frac{1}{q}};$$

per $x, y \in l^p$ con $p \geq 1$ vale la disuguaglianza di Minkowski

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

- Uno spazio N si dice *normato* se ad ogni elemento $x \in N$ é associato un numero reale non negativo che si indica con $\|x\|$ t. c.
  (1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
  (2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
  (3) $\|\alpha\, x\| = |\alpha| \|x\|$ per ogni α reale e complesso.
  Uno spazio normato é anche uno spazio metrico se si assume la distanza ricavata dalla norma: $d(x, y) = \|x - y\|$.

- Due norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ su X sono *norme equivalenti* se esistono due costanti positive α e β t. c. $\forall x, y \in X$:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1.$$

- Su $\mathbb{R}^N$ tutte le norme sono fra loro equivalenti.

ESEMPIO: Sugli spazi $l^p := \{\, x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \;:\; \sum_{n=1^{\infty}} |x_n|^p < \infty \,\}$, $1 \leq p < \infty$ si puó definire la seguente norma $\|x\|_{l^p} = \Big(\sum_{n=1^{\infty}} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$ che lo rende spazio normato.
Definiamo inoltre lo spazio l^{∞} lo spazio di tutte le successioni limitate di numeri complessi o reali. Si puó introdurre la seguente norma che lo rende spazio normato $\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$.
Osserviamo che vale la seguente inclusione stretta

$$l^1 \subset l^2 \subset l^p \subset l^q \subset l^{\infty},$$

with $2 < p < q$.