II Esonero di AM3 - 29/5/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
La superficie
$$S = \{(x,y,z): \ z = x^2 + y^2, \ 2 \le x^2 + y^2 \le 6\}$$
è parametrizzata da
$$\varphi : (x,y) \in \{2 \le x^2 + y^2 \le 6\} \to (x,y,x^2+y^2) \in S.$$
Poiché $\varphi_x = (1,0,2x)$ e $\varphi_y = (0,1,2y)$, otteniamo che
$$|\varphi_x \wedge \varphi_y| = |(-2x,-2y,1)| = \sqrt{1+4(x^2+y^2)},$$
e quindi in coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha che
$$\int_S (z-x^2) d\sigma = \int_{\{2\le x^2+y^2\le 6\}} y^2\sqrt{1+4(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\rho^3\sqrt{1+4\rho^2}.$$
Integrando per parti si ottiene infine
$$\int_S (z-x^2)d\sigma = \pi\left[\frac{\rho^2}{12}(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{120}(1+4\rho^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\right] = \frac{2039}{60}\pi.$$

Esercizio 2
Scrivendo
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \ 0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x, \ (x,y) \in E_0\}$$
con $E_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \ 0 \le y \le \sqrt{x}, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$, dal Teorema di Fubini si ottiene che
$$\int_E \frac{xy}{1+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{E_0}(\frac{\pi}{2}-x)\frac{xy}{1+y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\frac{\pi}{2}-x)\log(1+x)\,dx.$$
Integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned}
\int_E \frac{xy}{1+y^2}\,dx\,dy\,dz &= \frac{3\pi x^2 - 4x^3}{24}\log(1+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\pi x^2-4x^3}{1+x}\,dx \\
&= \frac{\pi^3}{96}\log(1+\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{24}[-\frac{4}{3}x^3 + \frac{3\pi+4}{2}x^2 - (3\pi+4)x + (3\pi+4)\log(1+x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3 - 12\pi - 16}{96}\log(1+\frac{\pi}{2}) - \frac{5}{576}\pi^3 + \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3
a) Ovvio.
b) In coordinate polari rispetto a $(-1,0)$, dal Teorema di Fubini si ha che
$$Area(E) = \int_E dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

c) Sia Γ la circonferenza unitaria di raggio 3 centrata in $(0,0)$, e $\Delta = B_3(0,0) \setminus E$. Dal Teorema di Gauss-Green si ha che

$$\int_\gamma \omega = \int_\Gamma \omega - \int_{\partial^+ E} \omega = \int_\Gamma \omega - \int_E dxdy = \int_\Gamma \omega - \frac{3}{2}\pi.$$

Data la parametrizzazione $\Gamma(t) = 3(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, resta quindi da calcolare

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} [-9\cos^5 t \sin t + (3\cos t - 6\log 9 \sin t - 12\sin^3 t \cos^2 t - 9\sin^5 t) 3\cos t] dt = 9\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 9\pi,$$

e quindi

$$\int_\gamma \omega = \frac{15}{2}\pi.$$