I Esonero di AM3 - 14/4/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Poiché $ds = t^2\sqrt{t^2+9}$ abbiamo che, ponendo $r = t^2$, si ottiene

$$\int_\gamma (x^2+y^2)^{\frac{1}{6}} ds = \int_0^4 t^3\sqrt{t^2+9}dt = \frac{1}{2}\int_0^{16} r\sqrt{r+9}dr. \tag{1}$$

Integrando per parti, si ha che

$$\int_\gamma (x^2+y^2)^{\frac{1}{6}} ds = \frac{r}{3}(r+9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(r+9)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{16} = \frac{2}{15}2743.$$

Esercizio 2
Abbiamo $F(0,0) = (0,0)$ e

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2y\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x+y} & \tan^2 x + \frac{1}{1+x+y} \\ 2(x+y)+1 & 2(x+y) \end{pmatrix}.$$

In particolare

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×2 invertibile con inversa

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la mappa F è localmente invertibile in $(0,0)$. Poiché $\|A\| \le 2\|A\|_\infty$ per ogni matrice 2×2 A, basta scegliere $r = \frac{\rho}{4}$ e trovare $\rho > 0$ piccolo tale che

$$\sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)} \|Id - TDF(x,y)\|_\infty = \sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)} \| \begin{pmatrix} -2(x+y) & -2(x+y) \\ -\frac{2y\tan x}{\cos^2 x} + \frac{x+y}{1+x+y} + 2(x+y) & -\tan^2 x + \frac{x+y}{1+x+y} + 2(x+y) \end{pmatrix} \|_\infty \le \frac{1}{4}.$$

Supponendo $\rho \le \frac{1}{4} < \frac{\pi}{4}$, dalle stime

$$|-2(x+y)| \le 4\rho,$$

$$|\frac{x+y}{1+x+y}| \le 4\rho,$$

$$|-\tan^2 x| \le \frac{\rho^2}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} \le 2\rho$$

$$|\frac{2y\tan x}{\cos^2 x}| \le \frac{2\rho^2}{\cos^3(\frac{\pi}{4})} \le 8\rho$$

si vede che vanno bene $\rho = \frac{1}{64}$, $r = \frac{1}{256}$. Inoltre, la mappa $G(z,w)$ ha il seguente sviluppo

$$G(z,w) = T\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + O(|(z,w)|^2) = (w, z-w) + O(|(z,w)|^2).$$

Esercizio 3
a) Poiché $\nabla f(x,y) = -f^2(x,y)(2x+y, x+4y)$, si vede che f non ha punti critici all'interno di D. I punti critici vincolati sul bordo interno $\partial_1 D = \{x^2+y^2=1\}$ devono soddisfare

$$2x+y = \lambda x\,, \;\; x+4y = \lambda y\,, \;\; x^2+y^2=1.$$

Si ha che $x, y \neq 0$ e $\lambda xy = x^2+4xy = y^2+2xy = 1-x^2+2xy$, ossia $2xy = 1-2x^2$. Quadrando ed usando $y^2 = 1-x^2$ si ottiene che $8x^4-8x^2+1=0$, ossia $x^2 = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$, $y^2 = \frac{2\mp\sqrt{2}}{4}$ e $xy = \mp\frac{\sqrt{2}}{4}$. Quindi

$$\min_{\partial_1 D} f = \frac{2}{3+\sqrt{2}}\,, \quad \max_{\partial_1 D} f = \frac{2}{3-\sqrt{2}}.$$

Similmente, sul bordo esterno $\partial_2 D = \{x^2+y^2=2\}$ i punti critici vincolati soddisfano $x^2 = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$, $y^2 = \frac{2\mp\sqrt{2}}{2}$ e $xy = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi

$$\min_{\partial_2 D} f = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\,, \quad \max_{\partial_2 D} f = \frac{1}{3-\sqrt{2}}.$$

In conclusione si ottiene

$$\min_{D} f = \frac{1}{3+\sqrt{2}}\,, \quad \max_{D} f = \frac{2}{3-\sqrt{2}}.$$

b) I punti di minimo sono $\pm Q_1$ con $Q_1 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}, \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right)$, mentre i punti di massimo sono $\pm P_1$ con $P_1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.