Appello B di AM3 - 28/6/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Sia S la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy = 1\}$ e $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la funzione distanza dall'origine. Pur non essendo l'insieme S limitato, abbiamo che

$$\lim_{(x,y,z)\in S,\ |(x,y,z)|\to+\infty} f(x, y, z) = +\infty.$$

Quindi $\sup_S f = +\infty$ mentre $\inf_S f$ risulta essere un minimo, raggiunto in un qualche punto di S. Da $\nabla f(x, y, z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, dobbiamo studiare i punti critici vincolati di f su S:

$$x = -\lambda y\ ,\ \ y = -\lambda x\ ,\ \ z = 2\lambda z.$$

Se $\lambda = \frac{1}{2}$, otteniamo $x = y = 0$ e quindi $z = \pm 1$, che fornisce i punti $P_\pm = \pm(0, 0, 1)$.
Se $\lambda \neq \frac{1}{2}$, otteniamo $z = 0$ e $x^2 = y^2$. Dalla condizione vincolare $xy = -1$, otteniamo $x = -y$ con $x = \pm 1$, che fornisce i punti $Q_\pm = \pm(1, -1, 0)$. Da $f(P_\pm) = 1$ e $f(Q_\pm) = \sqrt{2}$, otteniamo che $P_\pm$ sono i punti di minima distanza dall'origine a distanza 1.

Esercizio 2
Introduciamo coordinate $x = \rho \cos\theta$, y e $z = \rho \sin\theta$ in maniera che l'insieme V risulti della forma $\{\theta \in [0, 2\pi],\ 9(1 - \rho)^2 + 4y^2 \leq 1\}$. Notiamo che la condizione $\rho \geq 0$ risulta sempre soddisfatta, e l'integrale richiesto diventa

$$\int_V \sqrt{x^2 + z^2}dxdydz = 2\pi \int_{\hat{V}} \rho^2 d\rho dy,$$

ove $\hat{V} = \{9(1 - \rho)^2 + 4y^2 \leq 1\}$. Con l'ulteriore cambio di coordinate $1 - \rho = \frac{r}{3}\cos\psi$, $y = \frac{r}{2}\sin\psi$, riduciamo l'integrale di partenza a:

$$\int_V \sqrt{x^2 + z^2}dxdydz = \frac{\pi}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - \frac{r}{3}\cos\psi)^2 r dr d\psi = \frac{\pi^2}{3}\int_0^1 (2 + \frac{r^2}{9}) r dr = \frac{37}{108}\pi^2.$$

Esercizio 3
La curva C descrive il bordo orientato positivamente di $S = \{(x, y, z) :\ z = y,\ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. La parametrizzazione $\varphi(x, y) = (x, y, y)$ fornisce $\varphi_x \wedge \varphi_y = (0, -1, 1)$, e per il campo $V = (y + z, z - x, -x - y)$ si calcola il rotore come rot $V = (-2, 2, -2)$. Quindi otteniamo

$$\int_S < \text{rot } V, \nu > d\sigma = -4\int_{\{x^2+2y^2\leq 1\}} dxdy = -2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho = -2\sqrt{2}\pi.$$

D'altra parte, per l'integrale curvilineo si ottiene che

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} [-\sqrt{2}\sin^2 t + (\frac{\sin t}{\sqrt{2}} - \cos t)\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + (-\frac{\sin t}{\sqrt{2}} - \cos t)\frac{\cos t}{\sqrt{2}}]dt = -\sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt = -2\sqrt{2}\pi,$$

ove $t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$ parametrizza C.