Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

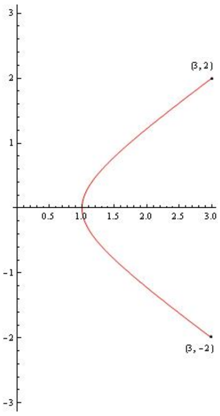
A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 5 (24 Marzo 2010)
Massimi e minimi vincolati

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

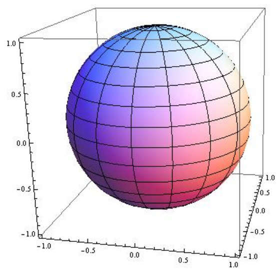
1. $f(x,y) = x - y \quad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 1,\ 0 \le x \le 3\}$.



Notiamo che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0,\ 0 \le x \le 3\}$ dove $g(x,y) = x^2 - 2y^2 - 1$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti di massimo/minimo di f nell'insieme $\{g = 0\}$ sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$. $\nabla f(x,y) = (1,-1)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, -4y)$ quindi il sistema diventa $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -4\lambda y \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$

Dalle prime due equazioni ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{4y}$ da cui $x = 2y$. Sostituendo nell'ultima equazione troviamo che $4y^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = 2y = \pm\sqrt{2}$. Le soluzioni del sistema sono quindi $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Il punto $(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ non è un punto di E quindi l'unico punto critico vincolato di f su E è $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Oltre a questo punto vanno considerati anche gli estremi di E cioè i punti di $(3,2)$ e $(3,-2)$. Dunque i possibili punti di massimo/minimo per f su E sono $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(3,2)$ e $(3,-2)$. $f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(3,2) = 1$ e $f(3,-2) = 5$. Dunque $\min_E f = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\max_E f = 5$.

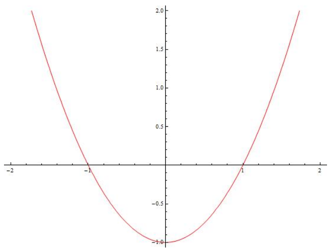
2. $f(x,y,z) = 2x + 3y + 6z \quad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Sia $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Siccome $E = \{g=0\}$ i punti di massimo/minimo per f su E sono tra le soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$. Dato che $\nabla f(x,y,z) = (2,3,6)$ e $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ il sistema diventa $\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ 3 = 2\lambda y \\ 6 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$

Dalle prime due equazioni si ricava che $\lambda = \frac{1}{x} = \frac{3}{2y}$ cioè $x = \frac{2}{3}y$. Dalla seconda e dalla terza equazione troviamo invece che $2\lambda = \frac{3}{y} = \frac{6}{z}$ da cui $z = 2y$. Sostituendo le due relazioni trovate nell'ultima equazione ricaviamo che $\frac{4}{9}y^2 + y^2 + 4y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{49}{9}y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{3}{7}$, $x = \frac{2}{3}y = \pm\frac{2}{7}$ e $z = 2y = \pm\frac{6}{7}$. Le soluzioni del sistema sono i punti $(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$ e $(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7})$. $f(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}) = 7$ e $f(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}) = -7$ quindi $\max_E f = 7$ e $\min_E f = -7$.

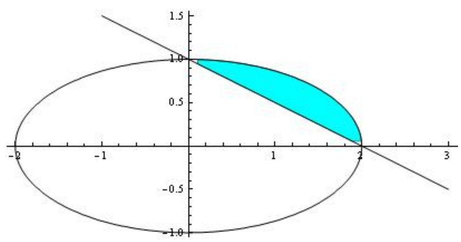
3. Sia P la parabola di equazione $y = x^2 - 1$.



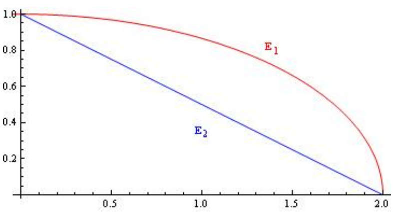
I punti di P che distano meno dall'origine sono i punti di minimo su P della funzione $f(x,y) = x^2+y^2$. Studiamo dunque f su P. Dato che $P = \{g=0\}$ dove $g(x,y) = y - x^2 + 1$ per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange i punti critici vincolati di f sono tra le soluzioni del sistema $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 2y = \lambda \\ y - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Dalla prima equazione otteniamo che $2x(1+\lambda) = 0$ da cui $x = 0$ o $\lambda = -1$. Se $x = 0$ dall'ultima equazione si ricava che $y = 1$ metre se $\lambda = -1$ dalla seconda equazione si ottiene $y = -\frac{1}{2}$ e sostituendo nella terza $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque $(0,1)$ e $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$. Dato che $f(0,1) = 1$ e $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ possiamo dire che i punti di P che distano meno dall'origine sono $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$.

4. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y \geq 2, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ $\quad f(x,y,z) = e^{xy}$.



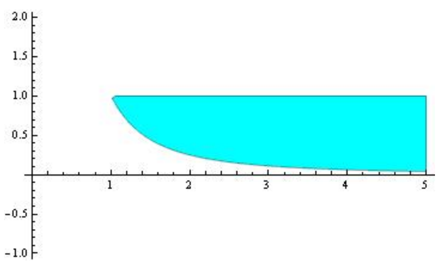
E è l'intersezione tra l'ellisse $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e il semipiano $x + 2y \geq 2$. I punti di massimo/minimo di f su E possono trovarsi o all'interno di E oppure sul bordo di E. I punti di massimo/minimo interni ad E sono punti stazionari di f cioè punti in cui $\nabla f = 0$. $\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy}) = (0,0) \iff \begin{cases} ye^{xy} = 0 \\ xe^{xy} = 0 \end{cases}$. L'unica soluzione di questo sistema è il punto $(0,0)$ che però non è un punto di E (non soddisfa la condizione $x+2y \geq 2$) quindi non ci sono punti critici interni ad E. Cerchiamo ora i massimi/minimi di f su ∂E. $\partial E = E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x,y) \mid x^2+4y^2 = 4, x+2y \geq 2\}$ è la porzione dell'ellisse $x^2+4y^2 = 4$ contenuta nel semipiano $x+2y \geq 2$ mentre $E_2 = \{(x,y) \mid x+2y = 2, x^2+4y^2 \leq 4\}$ è la porzione della retta $x+2y = 2$ contenuta all'interno dell'ellisse $x^2+4y^2 \leq 4$.



I punti critici di f su E_1 sono soluzioni in E del sistema $\begin{cases} ye^{xy} = 2\lambda x \\ xe^{xy} = 8\lambda y \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases}$.
Se $x=0$ dalla prima equazione toviamo $y=0$ ma il punto $(0,0)$ non soddisfa l'ultima equazione quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. Analogamente se $y=0$ dalla seconda equazione ricaviamo $x=0$ il che come prima non è possibile. Se $x,y \neq 0$ dalle prime due equazione troviamo che $\lambda e^{-xy} = \frac{y}{2x} = \frac{x}{8y}$ da cui $x^2 = 4y^2$. Sostituendo nell'ultima equazione si trova $8y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = \pm\sqrt{2}$. Le soluzioni del sistema sono dunque i punti $(\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Tra questi solo $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un punto di E.

I punti critici di f su E_2 sono soluzioni in E del sistema $\begin{cases} ye^{xy} = \lambda \\ xe^{xy} = 2\lambda \\ x+2y = 2 \end{cases}$. Dalle prime due equazioni troviamo $x = 2y$ quindi dalla terza $4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. L'unica soluzione del sistema è quindi $(1, \frac{1}{2})$.
Infine dobbiamo considerare i punti di $E_1 \cap E_2$ cioè le soluzioni di $\begin{cases} x^2+4y^2 = 4 \\ x+2y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 2-2y \\ (2-2y)^2+4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2y \\ 8y^2-8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-2y \\ y(y-1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 1$ o $y = 0$. Se $y = 1$ troviamo $x = 0$ mentre se $y = 0$ troviamo $x = 2$. Le soluzioni dell'ultimo sistema sono dunque $(0,1)$ e $(2,0)$. Riassumendo i possibili punti di massimo/minimo di f su E sono i punti $(0,1)$, $(2,0)$, $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(1, \frac{1}{2})$.
$f(0,1) = f(2,0) = 1$, $f(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = e$ ed $f(1, \frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}$ pertanto $\max_E f = e$ mentre $\min_E f = 1$.

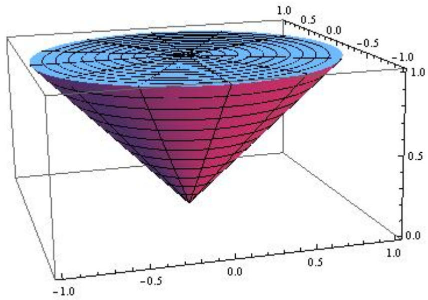
5. $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y \geq 1, x \geq 0, y \leq 1\right\}$ $\quad f(x,y) = x + y^2$.



Osserviamo per prima cosa che f non è superiormente limitata. Infatti $\forall\ n \geq 1$ si ha che $(n,1) \in E$ quindi $\sup_E f \geq f(n,1) = n+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \sup_E f = +\infty$.

Notiamo inoltre che f è inferiormente limitata (in quanto $f \geq 0$ su E) e che se $(x_n, y_n) \in E$ è una successione di punti di E per cui $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$ allora necessariamente $x_n \to +\infty$ e quindi $f(x_n, y_n) \geq x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dunque f è una funzione coerciva su E che è un insieme chiuso e quindi deve avere un minimo.
Dato che $\nabla f = (1, 2y) \neq (0, 0)$ tale minimo non può essere raggiunto all'interno di E. Cerchiamo dunque i punti di minimo per f su ∂E. $\partial E = E_1 \cup E_2$ dove $E_1 = \{(x, y) \mid y = 1, x \geq 1\}$ ed $E_2 = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0, x > 0 y < 1\}$ con $g(x, y) = x^2 y - 1$.
Se $x \geq 1$ $f|_{E_1}(x, y) = f(x, 1) = x + 1$ ha un minimo in $x = 1$ dunque $\min_{E_1} f = 2$. I punti di minimo per f su E_2 sono soluzioni del sistema $\begin{cases} 1 = 2\lambda xy \\ 2y = \lambda x^2 \\ x^2 y = 1 \end{cases}$ Dall' ultima equazione ricaviamo che $x, y \neq 0$ quindi dalle prime due equazioni ricaviamo $\lambda = \frac{1}{2xy} = \frac{2y}{x^2} \Rightarrow x = 4y^2$. Sostituendo nell'ultima equazione troviamo $16y^5 = 1 \Longrightarrow y = \frac{\sqrt[5]{2}}{2}$ e quindi $x = \sqrt[5]{4}$. L'unica soluzione in E del sistema è il punto $(\sqrt[5]{4}, \frac{\sqrt[5]{2}}{2})$. Dato che $f(\sqrt[5]{4}, \frac{\sqrt[5]{2}}{2}) = \sqrt[5]{4} + \frac{\sqrt[5]{4}}{4} = \frac{5}{4}\sqrt[5]{4} < 2$ possiamo dire che $\min_E f = \dfrac{5}{4}\sqrt[5]{4}$.

6. $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z < 1\right\}$ $\quad f(x, y, z) = z^3 + xy$.



f è una fuzione continua su $\overline{E}$ che è un insieme compatto quindi $\sup_E f = \max_{\overline{E}} f$ e $\inf_E f = \min_{\overline{E}} f$. Studiamo quindi f su $\overline{E}$.
$\nabla f = (y, x, 3z^2) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$. L'origine non è però un punto dell' interno di $\overline{E}$ quindi non ci sono punti critici di f nell'interno di $\overline{E}$.
$\partial\overline{E} = E_1 \cup E_2 \cup \{(0, 0, 0)\}$ dove $E_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2, 0 < z < 1\}$ ed $E_2 = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ i punti critici di f su E_1 sono soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$
Se $x = 0$ allora dalla prima equazione troviamo che $y = 0$ e dalla quarta che $z = 0$.
Se $x \neq 0$ allora anche $y \neq 0$ (dalla seconda equazione) quindi $2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = y^2$ cioè $x = y$ o $x = -y$. Se $x = y$ il sistema diventa $\begin{cases} 1 = 2\lambda \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ 3z^2 + z = 0 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases}$
dato che $x \neq 0$ non si può avere $z = 0$ quindi dalla seconda equaione troviamo $z = -\frac{1}{3}$ il che non è possibile in $\overline{E}$ quindi in questo caso il sistema non ha soluzione. Se $x = -y$ toviamo $\begin{cases} 1 = -2\lambda \\ 3z^2 = -2\lambda z \\ 2x^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ 3z^2 - z = 0 \\ 2x^2 = z^2 \end{cases}$ dalla seconda equazione si ricava $z = \frac{1}{3}$ e dalla terza $x = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Le soluzioni del sistema sono dunque $(0, 0, 0)$ e $(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$.
Vediamo infine cosa succede su E_2. $f(x, y, 1) = 1 + xy$ quindi studiare f su E_2 è

equivalente a studiare la funzione $h(x,y) = 1 + xy$ nel disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$. $\nabla h = (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = 0$ quindi l'unico punto critico di h all'interno del disco è $(0,0)$.

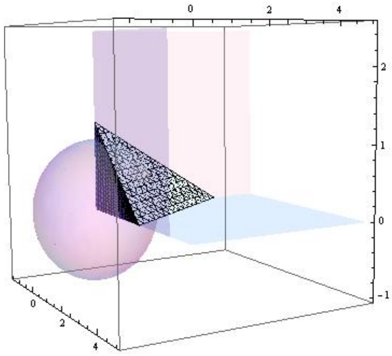
I punti critici di h sul bordo del disco sono soluzioni del sistema $\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ Se $x = 0$ dalla prima equazione troviamo $y = 0$ il che non è possibile per l'ultima equazione. Analogamente non si può avere $y = 0$. Se $x, y \neq 0$ allora dalle prime due equazioni troviamo $x^2 = y^2$ quindi dall'ultima equazione $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

I punti critici di f su E_2 sono quindi $(0,0,1)$,$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$. Riassumendo i possibili punti di massimo/minimo per f su $\overline{E}$ sono $(0,0,0)$, $(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3})$ $(0,0,1)$,$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

$f(0,0,0) = 0$, $f(\pm\frac{1}{3\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{54}$, $f(0,0,1) = 1$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1) = \frac{1}{2}$. Pertanto $\sup\limits_E f = \max\limits_{\overline{E}} = \dfrac{3}{2}$ e $\inf\limits_E f = \min\limits_{\overline{E}} f = -\dfrac{1}{54}$.

Notiamo infine che $\inf_E f$ è un minimo perché è assunto nel punto $(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}) \in E$ mentre $\sup_E f$ non è un massimo perchè è assunto solo nei punti $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ che non sono punti di E.

7. E è la porzione dell'ellissoide con semiassi di lunghezze a, b, c contenuta nell regione $z, y, z > 0$.



Consideriamo un punto $p = (x,y,z)$ dell'ellissoide E e cerchiamo l'equazione del piano tangente in p ad E. Consideriamo la funzione $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Si osserva che l'ellissoide considerato è la superfice di livello per $g(x,y,z) = 0$. Dato che il vettore $\nabla g(x,y,x)$ è il vettore ortogonale ad E in p, l'equazione del piano tangente ad E in p è $< \nabla g(x,y,z), (X - x, Y - y, Z - z) >= 0$ (nelle coordinate (X,Y,Z)) cioè

$$\frac{2x}{a^2}(X - x) + \frac{2y}{b^2}(Y - y) + \frac{2z}{c^2}(Z - z) = 0$$

che possiamo riscrivere come:

$$\frac{2x}{a^2}X + \frac{2y}{b^2}Y + \frac{2z}{c^2}Z - 2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1$$

Il piano così ottenuto intercetta gli assi coordinati nei punti $(\frac{a^2}{x}, 0, 0)$, $(0, \frac{b^2}{y}, 0)$ e $(0, 0, \frac{c^2}{z})$. Il tetraedro così ottenuto avrà volume $Vol(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{(6xyz)}$. Studiamo dunque la funzione $f(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{(6xyz)}$ sull'insieme E. Cerchiamo i punti di E in cui $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$;

$$\begin{cases} \frac{-a^2b^2c^2}{x^2yz} = \lambda\frac{2x}{a^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xy^2z} = \lambda\frac{2y}{b^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz^2} = \lambda\frac{2z}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2x^2}{a^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2y^2}{b^2} \\ \frac{-a^2b^2c^2}{xyz} = \lambda\frac{2z^2}{c^2} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Dalle prime tre equazioni otteniamo la relazione: $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ e dato che $x, y, z, a, b, c > 0$, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Sostituendo nell'equazione del vincolo otteniamo

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

A queste coordinate corrisponde il volume del tetraedro $V = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.
Questo è un punto di minimo essendo la funzione illimitata per $(x_n, y_n, z_n) \in E$ t.c. $x_ny_nz_n \to 0$

8. $F(x,y) = \left(\cos x \cos y + x \log\left(\frac{2}{\pi}y\right), e^{xy}\right)$.

   (a) F è una funzione di classe C^1 in un intorno del punto $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & -\cos x \sin y + \frac{x}{y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(0,\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice invertibile quinidi per il teorema della funzione inversa F è invertibile in un intorno di $(0, \frac{\pi}{2})$.

   (b) Sia $T = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Sappiamo che F è invertibile in un intorno di centro $(0, \frac{\pi}{2})$ e raggio ρ dove $\sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\| \leq \frac{1}{2}$ e che $g = F^{-1}$ è definita in un intorno di centro $F(0\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ e raggio $r \leq \frac{\rho}{4\|T\|_\infty} = \frac{\rho}{4}$.
   $Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & -\cos x \sin y + \frac{x}{y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{\pi}ye^{xy} & -\frac{2}{\pi}xe^{xy} \\ -\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right) & 1 - \cos x \sin y + \frac{x}{y} \end{pmatrix}$
   Supponendo che $\rho \leq \frac{1}{3}$ abbiamo
   $|1 - \frac{2}{\pi}ye^{xy}| \leq |1 - \frac{2}{\pi}y| + |\frac{2}{\pi}y - \frac{2}{\pi}ye^{xy}| = \frac{2}{\pi}|y - \frac{\pi}{2}| + \frac{2}{\pi}|y||1 - e^{xy}| \leq |y - \frac{\pi}{2}| + |y||1 - e^{xy}| \leq \rho + 2|1 - e^{xy}| \leq \rho + 6|xy| \leq \rho + 12\rho = 13\rho$
   $|-\frac{2}{\pi}xe^{xy}| \leq |x|e^{xy} \leq 3\rho$
   $|-\sin x \cos y + \log\left(\frac{2}{\pi}y\right)| \leq |\sin x||\cos x| + |\log\left(\frac{2}{\pi}y\right)| \leq |x| + |\log\left(1 + \frac{2}{\pi}y - 1\right)| \leq \rho + |\log\left(1 + \frac{2}{\pi}(y - \frac{\pi}{2})\right)| \leq \rho + \frac{4}{\pi}|y - \frac{\pi}{2}| \leq \rho + \frac{4}{\pi}\rho \leq 3\rho$
   $|1 - \cos x \sin y + \frac{x}{y}| \leq |1 - \cos x \sin y| + \frac{|x|}{|y|} \leq |1 - \cos x| + |\cos x - \cos x \sin y| + \frac{|x|}{|y|} \leq \frac{x^2}{2} + |\cos x||1 - \sin y| + 2|x| \leq \frac{\rho^2}{2} + |1 - \sin y| + 2\rho \leq \frac{5}{2}\rho + |1 - \sin(y - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})| \leq \frac{5}{2}\rho + |1 - \cos(y - \frac{\pi}{2})| \leq \frac{5}{2}\rho + \frac{|y - \frac{\pi}{2}|^2}{2} \leq \frac{5}{2}\rho + \frac{\rho^2}{2} \leq 3\rho$.
   Dunque $\sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\| \leq 2 \sup\limits_{B_\rho(0,\frac{\pi}{2})} \left\| Id - T\frac{\partial F}{\partial(x,y)} \right\|_\infty \leq 26\rho \leq \frac{1}{2}$ se $\rho \leq \frac{1}{52}$.

   (c) Sappiamo che $\frac{\partial g}{\partial(u,v)}(0,1) = \left(\frac{\partial F}{\partial(x,y)}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\pi} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ quindi lo sviluppo di Taylor di g attorno al punto $(0,1)$ è
   $g(u,v) = \begin{pmatrix} g_1(u,v) \\ g_2(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\pi}(v-1) + o(\sqrt{u^2 + (v-1)^2}) \\ \frac{\pi}{2} - u + +o(\sqrt{u^2 + (v-1)^2}) \end{pmatrix}$